



Cosmologie et modifications à grandes distances de l'interaction gravitationnelle

Riad Ziour

► To cite this version:

Riad Ziour. Cosmologie et modifications à grandes distances de l'interaction gravitationnelle. Cosmologie et astrophysique extra-galactique [astro-ph.CO]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2010. Français. NNT: . tel-00560440

HAL Id: tel-00560440

<https://theses.hal.science/tel-00560440>

Submitted on 28 Jan 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITE PARIS DIDEROT (Paris 7)

Ecole Doctorale d'Astronomie et d'Astrophysique d'Ile-de-France

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : **PHYSIQUE THÉORIQUE**

présentée par

Riad ZIOUR

**Cosmologie et modifications à grandes distances de
l'interaction gravitationnelle**

Thèse effectuée au Laboratoire AstroParticules et Cosmologie,
soutenue le 19 Janvier 2010 devant le jury composé de :

MM. Francis Bernardeau
Pierre Binétruy
Christos Charmousis
Cédric Deffayet
David Langlois

rapporteur
président du jury
rapporteur
directeur de thèse

Résumé

Dans le cadre de la relativité générale, l'observation de la phase actuelle d'accélération de l'expansion de l'Univers soulève de nombreuses questions car elle semble indiquer l'existence d'une "énergie noire" dont on ne connaît pas la nature. Afin de pouvoir expliquer l'accélération de l'Univers sans énergie noire, d'autres théories de la gravité ont été proposées. Cette thèse est consacrée à l'étude de certaines de ces théories de gravité modifiée, ainsi qu'aux méthodes d'observation qui peuvent les contraindre.

La première partie de cette thèse présente un panorama des théories de gravité modifiée ainsi que leurs motivations. La seconde partie analyse les théories de gravité massive et le mécanisme dit « de Vainshtein », qui permet à certaines solutions de la gravité massive de différer fortement de la relativité générale aux échelles cosmologiques tout en satisfaisant les contraintes expérimentales au sein du système solaire. La validité de ce mécanisme y est démontré pour la première fois, au travers de l'étude de certaines solutions à symétrie sphérique. La troisième partie traite des modifications scalaires de la gravité ; un nouveau modèle de gravité scalaire y est notamment proposé, inspiré du mécanisme de Vainshtein de la gravité massive. Enfin, la quatrième partie décrit les différentes observations locales, astrophysiques et cosmologiques, susceptibles de contraindre les théories de gravité modifiée.

Mots Clés : Cosmologie, Énergie noire, Gravitation, Gravité modifiée, Gravité massive, Vainshtein, k -Mouflage, Lentilles gravitationnelles.

Abstract

Cosmology and modifications of gravity at large distances

In the framework of General Relativity, the observed current acceleration of the expansion of the Universe requires the presence of a “Dark Energy” component, whose nature is not well understood. In order to explain the acceleration of the Universe without introducing such a tantalizing source of energy, other gravitation theories have been designed. This thesis is devoted to the study of some of these modified gravity theories, as well as to the observation methods that could constrain them.

The first part of this thesis presents a review of modified gravity theories and their motivations. The second part is devoted to the study of the massive gravity theories and of the so-called Vainshtein’s mechanism, which allows some of the solutions of Massive Gravity to strongly differ from General Relativity at cosmological scales while satisfying the experimental constraints inside the solar system. For the first time, the validity of the Vainshtein’s mechanism is demonstrated, through the study of specific spherically symmetric solutions. The third part deals with scalar modification of gravity; a new model of this sort is presented, inspired by the Vainshtein’s mechanism in Massive Gravity. Finally, the fourth part discusses local, astrophysical and cosmological observations that might constrain modified gravity theories.

Key Words: Cosmology, Dark Energy, Gravitation, Modified gravity, Massive gravity, Vainshtein’s mechanism, k -Mouflage, Lensing.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier ceux qui m'ont encadré et accompagné tout au long de ces trois années de thèse. Je remercie ainsi David Langlois d'avoir accepté d'être mon directeur de thèse, et de m'avoir accordé sa confiance et ses conseils avisés. J'ai eu la grande chance d'être encadré au quotidien durant ma thèse par Cédric Deffayet, que je tiens à remercier tout particulièrement. Il a su être disponible pour nos échanges, malgré toutes ses activités de chercheur et d'enseignant. J'ai énormément appris à ses côtés : son savoir en physique et en mathématiques et ses intuitions pertinentes m'ont impressionné tout au long de ma thèse, et j'ai appris à partager l'exigence intellectuelle qu'il applique à sa pratique de la recherche scientifique. J'ai également eu la chance de travailler avec le Professeur Lam Hui, dont la grande culture cosmologique et la pertinence d'analyse m'ont été d'un grand apport et je tiens à le remercier d'avoir guidé mes pas d'apprenti cosmologiste.

Je suis également très reconnaissant à Francis Bernardeau et Christos Charmousis d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse, ainsi qu'à Pierre Binétruy et Lam Hui d'avoir bien voulu être membres de mon jury de thèse.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du laboratoire *AstroParticules et Cosmologie* et de l'UFR de Physique de Paris Diderot de m'avoir accueilli tout au long de ces trois années de thèse et de m'avoir offert des conditions de travail stimulantes et propices à la recherche. Je souhaite ainsi remercier la direction du laboratoire et de l'UFR, en les personnes de Pierre Binétruy, Daniel Vignaud et Yannick Giraud-Héraud, pour leur soutien constant. Merci à Georgette Diaby, Martine Piochaud, Hélène Le Bihan et Aurélia Guet, qui m'ont offert des conditions matérielles si excellentes. Il me faut aussi souligner les précieux apports des très nombreuses discussions partagées avec les membres du laboratoire APC, et notamment du groupe théorie. Ma gratitude va ainsi tout particulièrement à Danièle Steer et à Jihad Mourad avec qui j'ai eu un grand plaisir à parler de physique et de mathématiques. C'est avec un immense plaisir que je remercie également Evgeny Babichev, qui a joué un rôle très important dans le déroulement ma thèse : post-doctorant au laboratoire APC pendant les deux dernières années de ma thèse, j'ai énormément appris grâce à lui. Enfin, un grand merci aux étudiants du laboratoire, qui ont rendu ces trois années vivantes et chaleureuses. Je souhaite tout particulièrement remercier Alejandro, pour ses innombrables relectures de mes lettres de motivations, Sébastien et Julien, pour avoir partagé mon bureau, mon désordre et mes questions, Alexandre pour avoir essuyé les plâtres du nouveau campus avec moi, Michela et Lorenzo pour leur charme tout italien, ainsi que Sofiane, Euihun et Ahmed pour nos nombreuses discussions.

Au cours de ma thèse, j'ai eu la chance d'effectuer de nombreux séjours à la *Columbia University*, à New York, et je remercie le département de Physique de Pupin de son accueil toujours chaleureux. Mes discussions avec Kristen Menou, Lam Hui, Marilena, Fai, Andrea, Ivan et bien d'autres m'ont été très précieuses. L'*Institut d'Astrophysique de Paris* m'a également accueilli au début de ma thèse, et j'en garde un excellent souvenir. J'en profite pour remercier Patrick Peter, Jean-Philippe Uzan, Gilles Esposito-Farese et Luc Blanchet pour les échanges que nous avons pu avoir.

La thèse étant l'aboutissement d'un long parcours universitaire, j'aimerais profiter de l'occasion pour remercier les professeurs qui m'ont aidé tout au long de ces années. Je remercie tout particulièrement Jean Dalibard, qui m'a fait découvrir la mécanique quantique et la recherche, ainsi que David Langlois et Andrei Beloborodov pour leur initiation à la relativité générale. J'ai moi-même enseigné, et je remercie à ce titre les étudiants de Columbia et de Paris Diderot d'avoir bien voulu assister à mes cours. Mon admiration va également à Noëlle Pottier, avec qui j'ai enseigné les mathématiques et dont le cours reste pour moi un exemple de clarté et de pédagogie.

Enfin, je souhaiterais remercier ma famille et mes amis qui m'ont accompagné et soutenu tout au long de ces trois années. Mes parents et mes grands-parents, bien sûr, ainsi que ma soeur et mon frère, qui ont toujours été présents, notamment dans les moments les moins faciles. Mari-Wenn, également, sans qui cette thèse n'aurait sans doute pas eu lieu. Hannah enfin, ainsi que mes amis, et en particulier Youenn, Maxime, Raphaël, Marie, Fai, Ivan et Mekki, pour leurs encouragements et leur soutien dans toute cette aventure.

Table des matières

Introduction	15
I L'accélération de l'Univers et modèles de gravité	19
1 L'accélération de l'Univers et modèles de gravité	21
1.1 Le modèle cosmologique standard	22
1.1.1 Métrique de FLRW et équations du mouvement	22
1.1.2 Relativité Générale et équations de Friedmann	22
1.1.3 Équation d'état de la matière et évolution de l'Univers	24
1.2 Modélisation et preuves expérimentales de l'existence de l'énergie noire	26
1.2.1 Modélisation de l'énergie noire	26
1.2.2 Supernovae de type Ia	27
1.2.3 Âge de l'Univers	29
1.2.4 Fond diffus cosmologique	30
1.2.5 Oscillations Acoustiques des Baryons (BAO)	31
1.2.6 Mesures combinées	31
1.3 Énergie noire ou gravité modifiée ?	33
1.3.1 Le problème de la constante cosmologique	33
1.3.2 Modèles restant dans le cadre de la Relativité Générale	34
1.3.3 Modèles de gravité modifiée	35
II Solutions à symétrie sphérique des théories de gravité massive	37
2 Présentation de la gravité massive	39
2.1 Motivations	40
2.1.1 Motivation "naïve" : le graviton peut-il avoir une masse ?	40
2.1.2 Modèles branaires et modifications de la gravité dans l'infrarouge	41
2.2 Le graviton massif libre	46
2.2.1 Action du graviton massif à l'ordre quadratique	46
2.2.2 Choix du terme de masse	47
2.2.3 Propagateur et discontinuité de vDVZ	48
2.3 Complétion non-linéaire et conjecture de Vainshtein	50
2.3.1 Action non-linéaire de la gravité massive	50
2.3.2 Analyse hamiltonienne	52
2.3.3 Le mécanisme de Vainshtein	56

2.4	Limite de découplage	60
2.4.1	Introduction au mécanisme de Stückelberg : le champ de Proca	60
2.4.2	Le mécanisme de Stückelberg pour la gravité massive	61
2.4.3	La normalisation canonique et la limite de découplage	64
2.4.4	Le mécanisme de Vainshtein dans la limite de découplage	65
2.4.5	Du fantôme caché dans les dérivées d'ordre supérieur	66
2.5	De la limite de découplage au cas général	68
2.5.1	Intervalle de validité de la limite de découplage	68
2.5.2	Vers une solution globale de la gravité massive	69
3	Solutions à symétrie sphérique de la gravité massive : une introduction	71
3.1	Equations et ansatz à symétrie sphérique	72
3.1.1	Choix de la forme des métriques	72
3.1.2	Les équations du mouvement	73
3.2	Développement en série à grandes distances	76
3.2.1	Développement sous forme de série formelle	76
3.2.2	Convergence du développement en série	81
3.2.3	Unicité de la solution loin de la source	82
3.3	Développement en série au voisinage de la source	83
3.3.1	Ordre 0 : la Relativité Générale retrouvée	83
3.3.2	Ordre 1 et rayon de Vainshtein	85
3.3.3	Une classe de solutions autre que celle de Vainshtein	86
3.4	L'existence d'une solution globale en débat	86
3.4.1	Conditions aux bords et approches numériques	87
3.4.2	Solutions singulières... ou instabilité numérique ?	91
4	Les solutions à symétrie sphérique de la gravité massive dans la limite de découplage	93
4.1	Présentation du travail et résultats	94
4.1.1	Redéfinition des variables et équations du mouvement	94
4.1.2	Comparaison avec le formalisme de Goldstone	97
4.1.3	Solution sous forme de série à grandes distances	97
4.1.4	Solution sous forme de série à petites distances	98
4.1.5	Solution sous forme de série à l'intérieur de la source	99
4.1.6	Méthodes et résultats numériques	100
4.2	The Vainshtein mechanism in the decoupling limit of massive gravity (article)	102
4.2.1	Introduction	105
4.2.2	Massive gravity and the Goldstone picture	107
4.2.3	Static spherically symmetric solutions	113
4.2.4	The decoupling limit in spherically symmetric solutions	123
4.2.5	Discussion and conclusions	143
4.2.6	Appendices and References	144

5 Solutions à symétrie sphérique de la gravité massive	153
5.1 Construire une solution de la théorie complète	154
5.1.1 Les solutions de types Q	154
5.1.2 La solution de Vainshtein	156
5.2 Preuve de l'existence d'une solution à symétrie sphérique de la gravité massive	157
5.2.1 Présentation des résultats	157
5.2.2 Recovering General Relativity from massive gravity (article)	160
5.3 Étude de la solution trouvée	165
5.3.1 Les fonctions λ et ν	165
5.3.2 La fonction μ	166
5.3.3 La pression P	167
5.4 Un modèle simplifié de gravité massive	168
5.4.1 Les équations du mouvement	168
5.4.2 Validation numérique	169
5.4.3 Obtention d'une équation pour μ seulement	169
 III Modifications scalaires de la gravité	 173
6 Modifications scalaires de la gravité	175
6.1 Théories scalaire-tenseur	176
6.1.1 Présentation des théories scalaire-tenseur	176
6.1.2 Aspects phénoménologiques et cosmologiques	178
6.2 Modèles $f(R)$	180
6.2.1 Définition du modèle	180
6.2.2 Modèle $f(R) = R - \mu^4/R$	181
6.2.3 Nécessité d'un mécanisme non-linéaire à courtes distances	182
6.3 Mécanisme de caméléon	182
6.4 Mécanisme de Vainshtein, modèles de Galiléon et théories de k -Mouflage	184
6.4.1 Modèles de Galiléon	185
6.4.2 Théories de k -Mouflage	186
7 Théories de k-Mouflage (article)	187
7.1 Présentation des théories de k -Mouflage	187
7.2 k -Mouflage gravity (article)	190
7.3 Perspectives et pistes de travail	200
 IV Contraintes expérimentales sur les théories de gravité modifiée	 201
8 Confrontation avec l'expérience	203
8.1 Tests en laboratoire et dans le système solaire	204
8.1.1 Tests en laboratoire	204
8.1.2 Tests dans le système solaire et paramètres PPN	204
8.2 Galaxies et matière noire	206
8.3 Cosmologie	209
8.3.1 Évolution de la métrique de fond	209

8.3.2	Une introduction à la théorie des perturbations	209
8.3.3	Observables liées aux perturbations cosmologiques (galaxies, lentilles...)	214
8.3.4	Corrélations des observables cosmologiques	219
8.3.5	Corrélations galaxies-galaxies, galaxies-amplification et méthodes géométriques	221
8.3.6	La Relativité Générale en défaut ?	222
8.4	Tester la gravité avec les ondes gravitationnelles	223
8.4.1	Ondes gravitationnelles et observations	223
8.4.2	Diagramme de Hubble gravitationnel et dimensions supplémentaires	224
8.4.3	Propagation des ondes gravitationnelles dans le modèle DGP	224
8.4.4	Signal d'une source périodique	227
9	Corrélations galaxies-lentilles et corrections dues au biais d'amplification	231
9.1	Les corrélations galaxies-lentilles	231
9.2	Magnification Bias Corrections to Galaxy-Lensing Cross-Correlations (article)	234
	Conclusions et perspectives	245
	Annexes et bibliographie	249
A	Notations et abréviations	251
A.1	Notations	251
A.2	Abréviations	253
B	An introduction to Hamiltonian formalism	255
B.1	Hamiltonian formalism: general presentation	256
B.1.1	A gentle start: a traditional example	256
B.1.2	Example of a simple system with gauge invariance	257
B.1.3	General presentation of Dirac's Hamiltonian formalism	258
B.1.4	Gauge transformation and gauge fixation	260
B.1.5	Dirac's brackets	260
B.1.6	Extension to fields	262
B.2	The Electromagnetic field	262
B.2.1	The Lagrangian Formalism	262
B.2.2	The Hamiltonian formalism of electromagnetism	263
B.3	The Proca's field	266
B.3.1	The Proca's Action	266
B.3.2	Constraints and Gauge Invariance	267
B.3.3	Resolving the constraints	267
B.3.4	The Hamiltonian action	268
B.4	Proca Field with Stückelberg mechanism	268
B.4.1	The Action	268
B.4.2	Constraints and Gauge Invariance	270
B.5	ADM formulation of General Relativity	272

B.5.1	The covariant approach	272
B.5.2	Formulation in a specific base	272
B.5.3	The algebra of constraints	274
B.6	ADM formulation of Massive Gravity	275
B.6.1	The action and the momenta	275
B.6.2	Analysis at quadratic order	276
B.6.3	Analysis of the fully non-linear Massive Gravity	278
B.6.4	The Stückelberg mechanism in Massive Gravity	279
C	On the unicity of the solution far from the source	285
C.1	A simple singular Cauchy problem	286
C.2	The Cauchy problem in Massive gravity in the Decoupling Limit	288
C.3	The Cauchy problem in non-linear Massive Gravity	290
C.3.1	The set of equations	290
C.3.2	Leading behavior	292
C.3.3	A series expansion approach	295
C.3.4	Numerical solution	299
D	Some details about Numerics	301
D.1	Principle of the numerical methods	301
D.1.1	Runge-Kutta integration (shooting method)	302
D.1.2	Relaxation method	303
D.1.3	Comparison between the two methods	304
D.2	Rescaling of the variables and asymptotic behavior	305
D.2.1	Rescaling of variables	305
D.2.2	Asymptotic behavior	306
D.3	Shooting method	306
D.3.1	Numerical integration in the DL	306
D.3.2	Numerical integration the full system	308
D.4	Relaxation method	310
Bibliographie		313

Introduction

La théorie de la Relativité Générale est certainement l'une des théories les plus fascinantes de la physique moderne : elle allie l'élégance d'une formulation géométrique des lois de la gravité à une capacité inégalée de description des phénomènes gravitationnels du monde physique qui nous entoure. S'appuyant sur elle, le modèle cosmologique standard parvient à expliquer, avec une dizaine de paramètres, toutes les observations cosmologiques, qu'il s'agisse de la nucléosynthèse, du fond diffus cosmologique, de la forme des grandes structures de l'Univers, ou encore de phénomènes proprement relativistes comme les effets de lentille gravitationnelle. Il parvient à donner une description cohérente de notre Univers, depuis le Big-Bang et les premières "graines" des structures jusqu'aux galaxies que nous observons aujourd'hui.

Plusieurs éléments laissent cependant penser que la Relativité Générale n'est peut-être pas la théorie définitive de la gravité. À très haute énergie, on sait depuis l'avènement de la théorie quantique des champs que la Relativité Générale ne saurait être valide pour des échelles d'énergies au-delà de l'échelle de Planck. La présence de ce *cutoff* ultra-violet nous apprend donc qu'une autre théorie doit prendre le relais à très haute énergie, motivant ainsi les recherches en théories des cordes et en gravité quantique. À l'autre bout du spectre d'énergie, c'est la cosmologie qui nous amène à nous interroger sur la validité de la Relativité Générale. En effet, bien que le modèle cosmologique standard réussisse brillamment à donner une *description effective* du monde physique, il doit pour cela faire l'hypothèse que 95% du contenu de l'Univers nous est de nature inconnue. Ce *secteur sombre* est alors supposé être constitué pour 70% d'*énergie noire* et pour 25% de *matière noire*, la dénomination de ces composantes illustrant bien notre ignorance.

Au vu de ces difficultés, on ne peut s'empêcher de penser à d'autres théories qui au cours de l'histoire des Sciences sont parvenues à décrire les observations, certes correctement, mais au prix de raisonnements de plus en plus alambiqués, jusqu'à finalement être dépassées. Ce fut le cas de la théorie des épicycles de Ptolémée qui fut abandonnée au profit de la description copernicienne du système solaire, ou encore de la théorie de l'éther rendue obsolète par la relativité restreinte. À chaque fois, il s'est agi d'interpréter dans un cadre théorique renouvelé les observations qui posaient problème, afin de leur donner une explication plus convaincante. La Relativité Générale connaîtra-t-elle le même sort ? Il est encore trop tôt pour le dire, mais il est sans nul doute légitime de s'interroger sur sa validité et d'essayer de construire des théories de la gravité évitant de faire appel à des sources d'énergie inconnues.

Nous sommes encore loin d’une théorie de la gravité qui serait plus satisfaisante d’un point de vue conceptuel que la Relativité Générale, tout en étant en accord avec les nombreuses contraintes expérimentales qui existent sur les lois de la gravité. Pour l’instant, aucune théorie de *gravité modifiée* n’a pu atteindre le statut de théorie réaliste de la gravité. Face à la difficulté de la tâche que représente la construction d’une théorie de la gravité plus aboutie que la Relativité Générale, il est possible d’adopter une démarche légèrement différente, que l’on peut qualifier de *phénoménologique*. Cette démarche consiste à proposer et à étudier des modèles de gravité qui, sans avoir la prétention d’être entièrement réalistes, ouvrent d’intéressantes pistes d’exploration qui pourront peut-être mener *in fine* à une théorie cohérente de la gravité.

C’est dans ce cadre que se situe le travail de thèse présenté dans ce mémoire. Ce dernier s’articule en quatre grandes étapes.

Dans un premier temps, nous reviendrons en détail au Chapitre 1 sur les observations cosmologiques qui démontrent que l’Univers est actuellement en accélération ; nous interpréterons alors cette accélération comme le signe qu’une nouvelle physique est nécessaire, soit au travers d’une forme de matière pour le moment inconnue qui jouerait le rôle d’énergie noire, soit sous la forme de lois de la gravité différentes de celles de la Relativité Générale. Nous présenterons alors un panorama des différents modèles de gravité modifiée parmi lesquels on peut citer les modèles branaires, les théories de gravité massive et les modifications scalaires de la gravité.

La Partie II de ce mémoire sera consacrée aux modèles de gravité massive. Ces théories illustrent très bien la démarche phénoménologique dont nous parlions : bien que n’étant pas réalistes en elles-mêmes, ces théories ont permis d’identifier un mécanisme important, appelé mécanisme de Vainshtein, qui permet à certaines théories gravitationnelles de différer fortement de la Relativité Générale aux échelles cosmologiques, tout en satisfaisant aux contraintes sur les lois de la gravité dans le système solaire. Ce mécanisme, qui avait été proposé en 1972 par Vainshtein pour les solutions à symétrie sphérique des théories de gravité massive, est maintenant un élément important de nombreux modèles plus réalistes de gravité, comme le modèle DGP [111]. Cependant, la validité de ce mécanisme n’avait jamais été démontrée rigoureusement et l’un des principaux résultats obtenus durant ce travail de thèse a été la démonstration de la validité de ce mécanisme pour certains modèles de gravité massive. Ces résultats, obtenus en collaboration avec E. Babichev et C. Deffayet, ont fait l’objet des publications [28, 30], et seront détaillés aux Chapitres 4 et 5.

La Partie III nous permettra de présenter les théories de *modification scalaire* de la gravité, dans lesquelles un champ scalaire contribue à l’interaction gravitationnelle, en plus du graviton. Pour que ces théories soient intéressantes d’un point de vue phénoménologique, nous verrons que le champ scalaire doit être léger aux échelles cosmologiques mais ne pas jouer de rôle au sein du système solaire. Deux mécanismes permettent cela : le mécanisme de caméléon et le mécanisme de Vainshtein. Notre étude du mécanisme de Vainshtein dans le cadre des modèles de gravité massive nous a amené, E. Babichev et C. Deffayet et moi-même, à proposer une nouvelle classe de modifications scalaires de la gravité basée sur ce mécanisme. Nous présenterons ces théories que nous avons appelées *théories de k -Mouflage* [27] au Chapitre 7.

Enfin, nous détaillerons dans la Partie [IV](#) les contraintes expérimentales que doit satisfaire tout modèle de gravité pour être viable, tant d'un point de vue local que cosmologique. Parmi les différentes contraintes cosmologiques existantes, les corrélations entre des catalogues de galaxies proches et certains effets de lentilles gravitationnelles – nous appellerons ces corrélations *corrélations galaxies-lentilles* – sont particulièrement intéressantes. Après en avoir détaillé le principe au Chapitre [8](#), nous présenterons les résultats que nous avons obtenus, le professeur Lam Hui et moi-même, au sujet de certaines corrections qu'il est nécessaires d'apporter aux corrélations galaxies-lentilles [\[297\]](#).

Première partie

L'accélération de l'Univers et modèles de gravité

Chapitre 1

L'accélération de l'Univers et modèles de gravité

Sommaire

1.1	Le modèle cosmologique standard	22
1.1.1	Métrique de FLRW et équations du mouvement	22
1.1.2	Relativité Générale et équations de Friedmann	22
1.1.3	Équation d'état de la matière et évolution de l'Univers	24
1.2	Modélisation et preuves expérimentales de l'existence de l'énergie noire	26
1.2.1	Modélisation de l'énergie noire	26
1.2.2	Supernovae de type Ia	27
1.2.3	Âge de l'Univers	29
1.2.4	Fond diffus cosmologique	30
1.2.5	Oscillations Acoustiques des Baryons (BAO)	31
1.2.6	Mesures combinées	31
1.3	Énergie noire ou gravité modifiée ?	33
1.3.1	Le problème de la constante cosmologique	33
1.3.2	Modèles restant dans le cadre de la Relativité Générale	34
1.3.3	Modèles de gravité modifiée	35

Ce chapitre est consacré à l'accélération de l'Univers, et aux modèles physiques qui permettent de l'expliquer. Après avoir rappelé les éléments de cosmologie dont nous aurons besoin par la suite, nous détaillerons les principales observations qui démontrent que l'Univers est actuellement dans une phase d'expansion accélérée. Nous présenterons ensuite un panorama des modèles ayant pour objectif d'expliquer cette accélération. Nous verrons que certains modèles se basent sur la Relativité Générale et la présence d'énergie noire, tandis que d'autres proposent un changement plus radical de paradigme, en modifiant les lois de la gravité.

1.1 Le modèle cosmologique standard

1.1.1 Métrique de FLRW et équations du mouvement

Le modèle cosmologique standard se base sur le fait que l'Univers autour de nous apparaît comme étant isotrope à grandes échelles, tant au niveau de la répartition des galaxies que du fond diffus cosmologique. Si l'on suppose de plus que notre Terre n'occupe pas de place privilégiée dans l'Univers, on en arrive au *principe cosmologique* qui fait l'hypothèse que l'Univers est spatialement homogène et isotrope à grandes échelles.

La modélisation mathématique de cette hypothèse nous amène à décrire l'espace-temps par une métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) $g_{\mu\nu}$ dont la forme générale [215, 277, 282] s'écrit

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + f_K^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] , \quad (1.1)$$

où χ est la coordonnée radiale. La constante K décrit la géométrie de la section spatiale de l'espace-temps : l'espace est fermé pour $K > 0$, plat pour $K = 0$ et enfin ouvert pour $K < 0$. La fonction f_K , qui est telle que la surface d'une sphère de rayon χ est donnée par $S(\chi) = 4\pi f_K^2(\chi)$, prend la forme

$$f_K(\chi) = \begin{cases} K^{-1/2} \sin(\sqrt{K}\chi) & \text{si } K > 0 \\ \chi & \text{si } K = 0 \\ (-K)^{-1/2} \sinh(\sqrt{-K}\chi) & \text{si } K < 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

La fonction $a(t)$ s'appelle le *facteur d'échelle* et caractérise l'évolution de l'Univers. On normalise $a(t)$ de telle sorte qu'aujourd'hui $a \equiv a_0 = 1$ (nous noterons avec un indice ₀ la valeur des quantités cosmologiques évaluées aujourd'hui). Sa dépendance dans le temps est déterminée en résolvant les équations de la dynamique.

1.1.2 Relativité Générale et équations de Friedmann

Pour aller plus loin, il nous faut choisir une théorie de la gravitation à partir de laquelle nous pourrions dériver les équations de la dynamique pour le facteur d'échelle. La cosmologie standard est basée sur la *Relativité Générale* (RG); cependant, au cours de ce mémoire, nous travaillerons également avec d'autres théories alternatives de la gravité (gravité massive, modèle DGP, théories scalaire-tenseur, etc.); d'une théorie à l'autre, les équations de la dynamique varient, modifiant ainsi la cosmologie et l'interprétation que l'on peut faire des observations. C'est précisément là tout l'intérêt des théories de gravité modifiée, qui peuvent permettre de rendre compte des observations d'une façon différente de la RG. Nous reviendrons sur ce point à la Section 1.3; pour l'instant, nous voudrions présenter le modèle cosmologique standard, qui fait l'hypothèse que la gravité est décrite par la RG.

L'action de la RG s'écrit

$$S = \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R[g] + S_{matière}[g], \quad (1.3)$$

où $R[g]$ est le scalaire de Ricci et M_P est la masse de Planck qui est reliée à la constante de Newton G au travers de la relation $M_P^{-2} = 8\pi G$. La matière est supposée minimalement couplée à la métrique.

La variation de l'action de la RG par rapport à la métrique mène aux équations d'Einstein

$$G_\mu^\nu = 8\pi G T_\mu^\nu, \quad (1.4)$$

où $G_\mu^\nu \equiv R_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu R$ est le tenseur d'Einstein et T_μ^ν le tenseur énergie-impulsion de la matière

$$T_{\mu\nu}(x) \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}(x)} S_{\text{matière}}[g]. \quad (1.5)$$

Les identités de Bianchi garantissent que la matière est conservée, c'est-à-dire que

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu = 0. \quad (1.6)$$

L'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie, ainsi que la forme (1.1) de la métrique, impose au tenseur énergie-impulsion de la matière d'être celui d'un fluide parfait

$$T_\mu^\nu = \text{diag}(-\rho, P, P, P), \quad (1.7)$$

où ρ est la densité de la matière, et P sa pression. Il est ensuite aisé d'obtenir, à partir de l'expression (1.1) de la métrique de FLRW et des équations d'Einstein (1.4), les deux équations indépendantes dites *de Friedmann*

$$H^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{K}{a^2}, \quad (1.8)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P), \quad (1.9)$$

où $H \equiv \dot{a}/a$ est le paramètre de Hubble et un point représente une dérivée par rapport au temps cosmique t . L'équation de conservation de la matière prend quant à elle la forme

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (1.10)$$

Il est usuel de réécrire l'équation (1.8) sous la forme réduite

$$\sum_i \Omega_i + \Omega_K = 1, \quad (1.11)$$

où l'indice i correspond aux différents types de matière (radiation, matière noire, énergie noire, etc.) et où l'on a défini

$$\Omega_i \equiv \frac{8\pi G \rho_i}{3H^2}, \quad (1.12)$$

$$\Omega_K \equiv -\frac{K}{a^2 H^2}. \quad (1.13)$$

Les observations [177] montrent que la courbure spatiale est très proche de zéro, conformément aux prédictions génériques des modèles d'inflation (*cf.* par exemple [215], Chapitre 8); nous considérerons donc dans la suite de ce mémoire que l'Univers est plat et fixerons par conséquent $K = 0$.

1.1.3 Équation d'état de la matière et évolution de l'Univers

Équation d'état

La description la plus simple de la matière consiste à supposer que la densité et la pression de la matière suivent une équation d'état de la forme

$$P = w\rho \quad (1.14)$$

où w est supposé constant. La matière sans pression (matière noire froide¹) est décrite par $w = 0$ tandis que le rayonnement a une équation d'état $w = 1/3$. Dans le cas d'une constante cosmologique, $w = -1$.

Une fois muni de l'équation d'état (1.14), il est aisé d'intégrer les équations de Friedmann (1.8) et (1.9) et l'équation de conservation de la matière (1.10); pour $w \neq -1$, on obtient

$$H = \frac{2}{3(1+w)(t-\bar{t})}, \quad (1.15)$$

$$a(t) \propto (t-\bar{t})^{\frac{2}{3(1+w)}}, \quad (1.16)$$

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}, \quad (1.17)$$

où \bar{t} correspond au début de l'ère considérée. Pour $w = -1$, l'Univers est en accélération et correspond à un espace de de Sitter tel que

$$H = \text{cste}, \quad (1.18)$$

$$a(t) \propto e^{Ht}, \quad (1.19)$$

$$\rho = \text{cste}. \quad (1.20)$$

En utilisant la dépendance de ρ en a , on peut exprimer H en fonction du contenu en matière de l'Univers, grâce à l'expression

$$H^2 = H_0^2 \left(\sum_i \Omega_{i,0} a^{-3(1+w_i)} \right) = H_0^2 \left(\sum_i \Omega_{i,0} (1+z)^{3(1+w_i)} \right), \quad (1.21)$$

où l'on a introduit le redshift² $z \equiv a^{-1} - 1$. En intégrant cette équation, on peut obtenir l'évolution du facteur d'échelle $a(t)$.

Des origines à nos jours

Selon le modèle cosmologique standard, l'histoire de l'Univers peut se décomposer en une succession d'étapes (encore appelées *ères*), que nous résumons ci-dessous.

La nature de la première phase de l'évolution de l'Univers, entre l'origine de l'Univers et le Big Bang chaud, n'est pas encore bien établie, car il est très difficile de tester les modèles cosmologiques à des époques aussi reculées. Le modèle de l'*inflation* est cependant devenu

¹ *Cold Dark Matter (CDM)* en anglais.

² Nous faisons ici le choix de garder le mot anglais *redshift* en raison de son usage très courant, y compris dans un contexte francophone.

le paradigme standard. Il s'agit d'une phase d'expansion accélérée durant laquelle $w \simeq -1$. Cette phase d'accélération permet de donner une explication naturelle au problème de la platitude (le fait que l'espace apparaisse plat à l'heure actuelle, ce qui ne peut être le cas que si l'espace était extrêmement plat aux échelles de Planck) et au problème de l'horizon (le fait que des zones du ciel causalement indépendantes aient une température comparable à 10^{-5} près). On considère généralement que cette phase d'inflation est dominée par un champ scalaire (ou plusieurs champs scalaires pour les modèles multi-champs) appelé inflaton, en régime de *roulement lent* (cf. par exemple [215], Chapitre 8). Les perturbations quantiques de ce champs sont la source des perturbations de la matière que l'on peut observer dans les grandes structures et le fond diffus cosmologique (CMB). À l'issue de l'inflation, l'inflaton se désintègre en un grand nombre de particules : c'est la phase de *réchauffement*³.

La suite de l'histoire de l'Univers est bien comprise, et est décrite par le modèle du *Big Bang chaud* :

- la première phase qui suit le Big Bang chaud est l'ère *de radiation*, dominée par le rayonnement (photons et neutrinos). Cette phase dure jusqu'à l'égalité matière-rayonnement, c'est-à-dire jusqu'au moment où la densité de la matière commence à dominer la densité d'énergie du rayonnement (le redshift correspondant est $z_{eq} + 1 \equiv a_{eq}^{-1} \simeq 3600$).
- L'ère *de matière* est dominée par la matière noire (CDM). C'est le moment où se forment les grandes structures. C'est également durant l'ère de matière qu'a lieu le découplage entre les photons et les baryons (le redshift correspondant est $z_{dec} + 1 \equiv a_{dec}^{-1} \simeq 1100$). Cela est dû à la recombinaison des protons et des électrons libres qui s'assemblent pour former des atomes neutres. Après le découplage, les photons peuvent se propager librement dans l'Univers ; l'observation du CMB correspond à l'observation de ces photons émis au moment du découplage.
- Les observations récentes du CMB, des supernovae et des oscillations baryons-photons (BAO) indiquent que l'Univers est entré tardivement (aux alentours de [75] $z_c \simeq 0.67$ pour $\Omega_m = 0.3$) dans une nouvelle phase d'expansion accélérée, telle que $w \simeq -1$.

Cette dernière observation, à savoir que l'Univers est actuellement dans une phase d'expansion accélérée, constitue la motivation première des théories de gravité modifiée que nous étudierons dans ce mémoire de thèse. Nous chercherons notamment à répondre aux questions suivantes : quelle peut être la source de cette accélération, et comment contraindre expérimentalement les propriétés physiques de cette source ?

Avant de nous tourner vers ces questions à partir de la Section 1.3, nous voudrions consacrer la prochaine section à la modélisation de la source d'énergie responsable de cette accélération et que l'on appelle communément *énergie noire*, ainsi qu'aux preuves expérimentales de son existence.

³Phase de *preheating* en anglais.

1.2 Modélisation et preuves expérimentales de l'existence de l'énergie noire

1.2.1 Modélisation de l'énergie noire

La source de l'accélération de l'Univers observée aujourd'hui est mal connue ; c'est pourquoi on lui donne souvent le nom d'*énergie noire*⁴, traduisant ainsi le caractère effectif de cette description. On peut modéliser⁵ cette énergie noire par le tenseur énergie impulsion d'un fluide parfait

$$T_{\mu}^{de\ \nu} = \text{diag}(-\rho_{de}, P_{de}, P_{de}, P_{de}), \quad (1.22)$$

la forme ci-dessus étant imposé par l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie de l'Univers qui est à la base de notre étude. On peut définir l'équation d'état

$$w_{de} \equiv P_{de}/\rho_{de}, \quad (1.23)$$

qui doit être telle que

$$w_{de} < -1/3 \quad (1.24)$$

pour que la phase dominée par l'énergie noire soit une phase d'accélération. La densité réduite d'énergie noire est mesurée par

$$\Omega_{de} \equiv \frac{8\pi G \rho_{de}}{3H^2}. \quad (1.25)$$

Les fonctions $\Omega_{de}(a)$ et $w_{de}(a)$ sont reliées l'une à l'autre au travers de l'équation (1.17), qui dans le cas de l'énergie noire, prend la forme

$$\Omega_{de} = \Omega_{de,0} a^{-3(w_{de}+1)}. \quad (1.26)$$

Nous verrons à la Section 1.3 différents modèles visant à décrire la nature de cette énergie noire. Il pourra s'agir d'une source de matière (champ scalaire par exemple), responsable de l'accélération. Il est également possible que les lois de la gravité ne soient pas celles de la RG, auquel cas l'interprétation de l'énergie noire comme une *énergie* n'est pas à prendre au sens littéral ; cependant, comme les conséquences de ces modification de la gravité ne peuvent pas être distinguées des effets qu'auraient une source d'énergie de la forme (1.22), nous décrirons la source de l'accélération de l'Univers, quelle qu'elle soit, par le tenseur énergie impulsion (1.22), et appellerons le phénomène responsable "énergie noire".

D'un point de vue pratique, on peut décrire en première approximation l'impact de cette énergie noire par une *constante cosmologique* Λ telle que $\rho_{\Lambda} = -P_{\Lambda} = \Lambda/(8\pi G)$. Les observations permettent d'évaluer

$$\Omega_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \simeq 0.7. \quad (1.27)$$

⁴*Dark Energy (DE)* en anglais ; nous utiliserons l'indice "de" pour caractériser les quantités en rapport avec l'énergie noire.

⁵Notons bien que cette *modélisation* ne prétend aucunement expliquer la *nature* physique de l'énergie noire, mais seulement en décrire l'effet sur l'évolution de la métrique de FLRW de l'Univers.

Nous voudrions à présent décrire plus en détail les méthodes astrophysiques et cosmologiques qui prouvent l'existence de l'énergie noire. La plupart des valeurs numériques qui seront données correspondent au cas d'une constante cosmologique (modèle dit Λ CDM), qui est la paramétrisation la plus simple de l'énergie noire. Il faut bien sûr garder à l'esprit qu'une paramétrisation plus fine peut se révéler plus réaliste. Le résultat principal reste cependant le même, quelque soit le cadre dans lequel on l'interprète : une composante d'énergie noire est nécessaire pour expliquer les observations que sont les Supernovae de type Ia, l'âge apparent de l'Univers, la position des pics acoustiques du CMB et la signature des oscillations baryons-photons dans les grandes structures.

1.2.2 Supernovae de type Ia

La preuve la plus directe que notre Univers est actuellement en expansion accélérée est donnée par la mesure de la distance luminosité des supernovae de type Ia (SN Ia). La distance luminosité d'un objet astrophysique de luminosité intrinsèque L_{source} et situé à un redshift z est définie de telle sorte que le flux observé ϕ_{obs} est donné par

$$\phi_{\text{obs}} = \frac{L_{\text{source}}}{4\pi D_L^2}. \quad (1.28)$$

On peut montrer [267] que dans un Univers (plat) en expansion, D_L est donnée par

$$D_L = \frac{1}{H_0}(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\sum_i \Omega_{i,0}(1+z')^{3(1+w_i)}}}, \quad (1.29)$$

où les $\Omega_{i,0}$ sont les densités réduites de chaque composante de matière (y compris l'énergie noire).

Pour des objets proches ($z \ll 1$), on voit que la formule (1.29) se résume à $z \sim H_0 D_L$. D'autre part, on peut montrer que le redshift est relié à la vitesse de récession des galaxies au travers de $z \equiv a^{-1} - 1 \sim v$; on obtient donc que pour des petits redshifts $v \sim H_0 D_L$. On retrouve là la loi de Hubble qui permet de mesurer H_0 à partir de l'observation de la vitesse de récession des galaxies. Pour des objets plus lointains, on voit que l'expression de la distance luminosité dépend du contenu en énergie de l'Univers, au travers de la racine carrée de l'équation (1.29). La mesure de la fonction $D_L(z)$ permet donc de mesurer le rôle joué par les différentes composantes de matière $\Omega_{i,0}$. Cependant, pour mesurer la distance luminosité d'objets au travers de la définition (1.28), encore faut-il connaître leurs luminosités intrinsèques.

C'est précisément le cas des SN Ia, qui peuvent être observées lorsqu'une naine blanche d'un système binaire a accréte tellement de matière en provenance de son compagnon que sa masse a atteint la masse de Chandrasekhar ; elle s'effondre alors et explose en supernova. La courbe de lumière des SN Ia est quasi-identique d'une supernova à l'autre : ce sont des *chandelles standard*. En 1998, deux équipes ont publié indépendamment le diagramme de Hubble $D_L(z)$ de deux catalogues de SN Ia : le groupe *Supernova Cosmology Project (SCP)* [213] a ainsi mesuré la distance luminosité de 42 SN Ia de redshift $z \in [0.18; 0.8]$, tandis que les membres de la *High-Z Supernova Search Team (HST)* [224] ont identifié 24 SN Ia proches et 14 SN Ia dans l'intervalle $z = 0.16 - 0.62$. Ces observations (ainsi que d'autres mesures qui ont eu lieu depuis lors, parmi lesquelles on peut citer [26, 171, 195, 225]) ont

permis d'écarter la possibilité que l'Univers soit plat et constitué uniquement de matière ($\Omega_m = 1$). Il est donc nécessaire d'inclure une composante d'énergie noire, comme on peut le voir sur la Fig. 1.1.

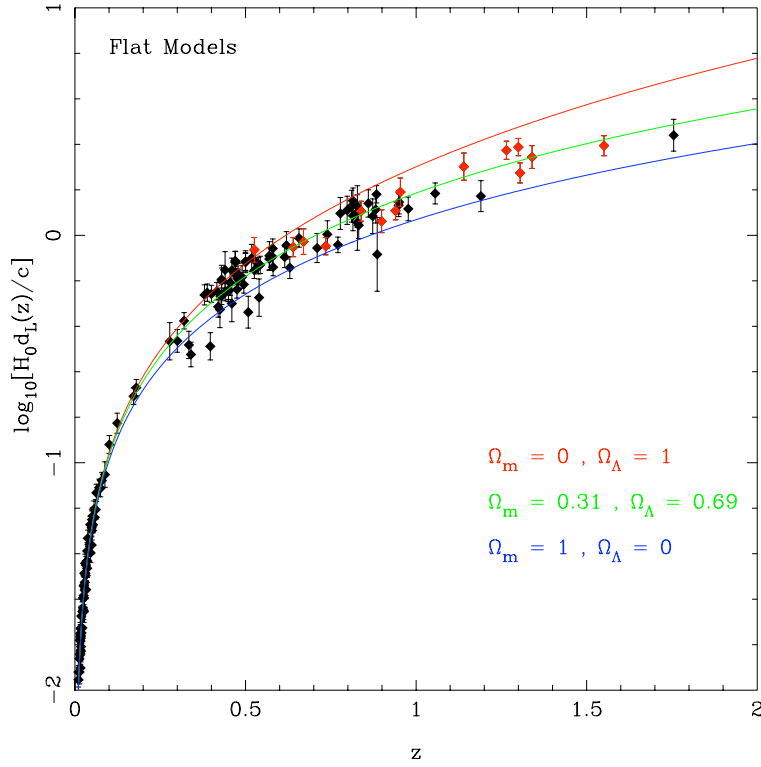


FIG. 1.1 – Diagramme de Hubble (distance lumineuse $\log[H_0 D_L(z)]$ en fonction du redshift z) pour un Univers plat pour un certain nombre de SN Ia observées. Les points noirs proviennent du catalogue “Gold” de Riess *et al.* [225], tandis que les points rouges proviennent de mesures effectuées par le Hubble Space Telescope (HST). On voit très clairement que le cas $\Omega_m = 0.31, \Omega_\Lambda = 0.69$ correspond mieux aux observations que le cas d’un univers sans constante cosmologique $\Omega_m = 1, \Omega_\Lambda = 0$. La figure provient de la référence [71].

Utilisées toutes seules, les données des SN Ia ne peuvent pas contraindre très précisément Ω_Λ ou Ω_m , mais seulement une combinaison des deux paramètres ; cela est dû à la forme elliptique des contraintes (*cf.* Fig. 1.2). Nous verrons qu’il est possible d’améliorer considérablement la précision des mesures en combinant ces mesures de distance lumineuse avec d’autres données (CMB, BAO,...).

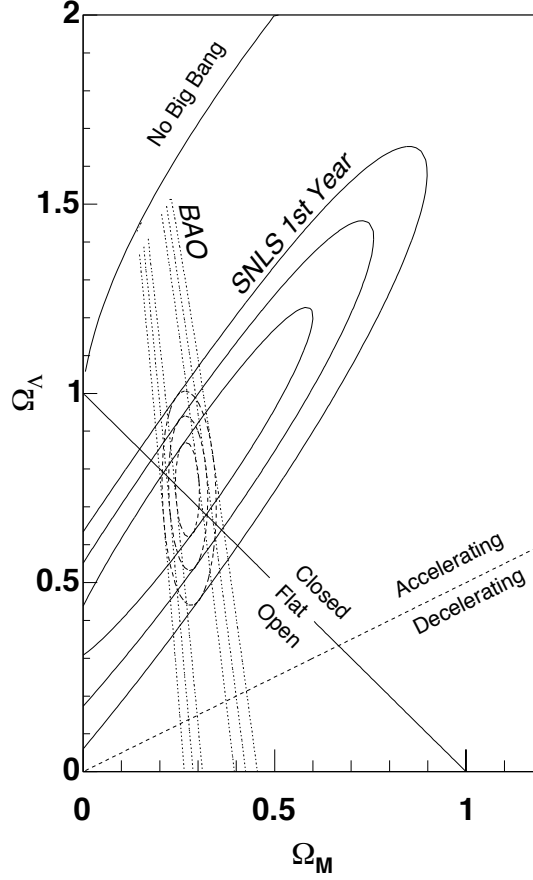


FIG. 1.2 – Contours des niveaux de confiance à 68.3%, 95.5% et 99.7% pour les paramètres $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$, issues du diagramme de Hubble obtenu par le *Supernova Legacy Survey (SNLS)* (lignes pleines) et des BAO mesurées par le *Sloan Digital Sky Survey (SDSS)* (lignes pointillées). Les contraintes conjointes sont représentées par les lignes en pointillés larges. Le cas $(\Omega_m, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$ est très clairement exclu. Les valeurs des paramètres $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ favorisées par les données des SN Ia sont dans une ellipse orientée selon une droite d'équation $\Omega_\Lambda \simeq \Omega_m + 0.4$. La figure ci-dessus est issue de [26].

1.2.3 Âge de l'Univers

Au moment du Big Bang chaud (qui correspond à la fin de l'inflation dans les modèles inflationnaires) que l'on prendra par convention à $t = 0$, on doit avoir $a(t = 0) \geq 0$. On en déduit donc que le temps t_0 écoulé depuis le Big Bang est borné par

$$t_0 = \int_{t_0}^{t_0} dt = \int_{a(t=0)}^{a_0=1} \frac{dt}{da} da \leq \int_0^1 \frac{dt}{da} da = \int_0^1 \frac{da}{aH} . \quad (1.30)$$

Si on utilise l'équation (1.21) et l'on exprime l'intégrale en fonction du redshift z on obtient

$$t_0 \leq \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)H(z)} = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)\sqrt{\sum_i \Omega_{i,0}(1+z)^{3(1+w_i)}}}, \quad (1.31)$$

où l'indice i correspond à la radiation, la matière noire et à l'énergie noire, que l'on modélisera par une constante cosmologique. On peut négliger dans l'intégrale ci-dessous la contribution de la radiation, car l'ère de radiation est très courte comparée aux ères suivantes. On voit donc que l'âge de l'Univers dépend des paramètres (Ω_m, Ω_{de}) . Dans le cas d'un univers dominé par la matière tel que $\Omega_m = 1$, on peut calculer explicitement l'intégrale de l'équation (1.31) et obtenir la borne $t_0 \leq 2/(3H_0)$. En utilisant la valeur de la constante de Hubble trouvée par l'équipe du *Hubble Key Project* [126] $H_0 = 72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, on trouve que $t_0 = 8 - 10$ milliards d'années. Cette valeur de l'âge de l'Univers doit être comparée à l'âge des plus vieux objets stellaires connus, qui est d'environ 11 – 13 milliards d'années [143, 163, 223]. À l'évidence, le cas d'un Univers dominé uniquement par de la matière est donc en contradiction avec l'âge de ces objets. Cette difficulté peut être résolue en supposant la présence d'énergie noire. Ainsi, si l'on fait l'hypothèse que l'énergie noire prend la forme d'une constante cosmologique telle que $(\Omega_m, \Omega_\Lambda) = (0.3, 0.7)$, on trouve que $t_0 \simeq 13.1$ milliards d'années, ce qui n'est plus contradictoire avec l'âge des plus vieux objets connus dans l'Univers. Ceci est donc un élément supplémentaire en faveur de la présence d'énergie noire dans l'Univers.

1.2.4 Fond diffus cosmologique

Une preuve indépendante de l'existence d'énergie noire dans l'Univers peut être obtenue à partir de la position des pics acoustiques du fond diffus cosmologique (CMB). En effet, on peut montrer [215] que la position dans l'espace des multipôles du n -ième pic est donné dans le cas de perturbations primordiales adiabatiques par

$$\ell_{(n)} = n\pi \frac{D_A(z_{LSS})}{r_s(z_{LSS})}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.32)$$

où nous avons introduit l'horizon sonique co-mobile

$$r_s(z) \equiv \int_z^\infty \frac{c_s(z')}{H(z')} dz', \quad (1.33)$$

et le diamètre angulaire⁶ co-mobile

$$D_A = \frac{1}{H_0} \frac{1}{1+z} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\sum_i \Omega_{i,0}(1+z')^{3(1+w_i)}}}. \quad (1.34)$$

Dans les expressions ci-dessus, $z_{LSS} \simeq 1100$ est le redshift de la surface de dernière diffusion⁷ et c_s est la vitesse du son du fluide baryon-photon dont les oscillations avant la recombinaison sont à l'origine des pics du CMB. Le rayon sonique $r_s(z_{LSS})$ dépend de

⁶Le diamètre angulaire co-mobile D_A d'un objet de longueur co-mobile L est tel que l'angle θ sous lequel est vu l'objet est donné par $\theta = L/D_A$.

⁷*Last Scattering Surface (LSS)* en anglais.

la quantité de baryons dans l'Univers Ω_b et est indépendant de l'énergie noire car cette dernière ne joue aucun rôle à des temps aussi anciens ; la hauteur des pics du CMB et en particulier la différence entre la hauteur des pics pairs et impairs permet de mesurer Ω_b (et donc $r_s(z_{LSS})$). On peut alors utiliser la mesure de la position des pics (1.32) pour contraindre l'énergie noire, au travers de la dépendance du diamètre angulaire $D_A(z_{LSS})$ dans la géométrie de l'Univers.

Le spectre du CMB dépend également de l'énergie noire au travers de l'effet Sachs-Wolfe intégré (ISW), qui permet de prendre en compte le fait que les photons du CMB ont traversé sur leur chemin jusqu'à nous des puits de potentiel en évolution. L'évolution des potentiels gravitationnels dépendant du contenu en matière de l'Univers, la mesure de cet effet permet de contraindre la densité d'énergie noire, ainsi que son équation d'état w_{de} .

L'analyse des données prises pendant 5 ans [177] par le satellite WMAP a permis de mesurer $\Omega_\Lambda = 0.742 \pm 0.030$ dans le cas d'une constante cosmologique. Dans le cas où l'équation d'état de l'énergie noire est également mesurée, l'équipe de WMAP a obtenu l'intervalle de confiance à 95% : $-1.37 < 1 + w_{de} < 0.32$.

1.2.5 Oscillations Acoustiques des Baryons (BAO)

Les oscillations du fluide baryons-photons qui ont lieu avant la recombinaison ne sont pas seulement observables dans le spectre du CMB, mais également dans les grandes structures. En effet, considérons une sur-densité à $t = 0$; sous l'effet de la pression de la radiation, cette sur-densité s'étend à la vitesse du son du plasma, sous la forme d'une onde sphérique. Au moment de la recombinaison, les densités aux points situés à une distance $r_s(z_{LSS})$ de la sur-densité initiale sont donc corrélées. De nos jours, cette corrélation est bien sûr brouillée, car les ondes sonores de différentes sur-densités se sont superposées depuis ; il est cependant possible de détecter statistiquement la signature de l'échelle co-mobile $r_s(z_{LSS})$, caractéristique des BAO, au travers de la mesure de la fonction de corrélation des galaxies. En raison de l'expansion de l'Univers, cette échelle co-mobile (fixe depuis la recombinaison, et qui vaut environ $r_s(z_{LSS}) \simeq 150\text{Mpc}$) est vue sous un angle

$$\theta_S = \frac{r_s(z_{LSS})}{D_A(z_{LSS})}, \quad (1.35)$$

où le diamètre angulaire co-mobile $D_A(z_{LSS})$ a été défini à l'équation (1.34). La première détection de ce phénomène a eu lieu en 2005 par l'équipe du SDSS [115] ; on voit sur la figure 1.3 la signature très nette du rayon sonique dans la fonction de corrélation des galaxies⁸ du catalogue.

Il est donc possible de tester le contenu en matière de l'Univers par l'étude des BAO, et notamment la densité d'énergie noire Ω_{de} et son équation d'état w_{de} . En particulier, l'observation des BAO donne des informations très précieuses lorsqu'elle est combinées avec d'autres observations, comme on peut le voir sur la figure 1.4.

1.2.6 Mesures combinées

Comme nous l'avons déjà signalé ci-dessus, les méthodes évoquées (SN Ia, CMB, BAO) sont complémentaires. En premier lieu, ces mesures provenant de processus physiques très

⁸Pour être précis, la référence [115] a utilisé les galaxies rouges lumineuses (LRG) du catalogue du SDSS.

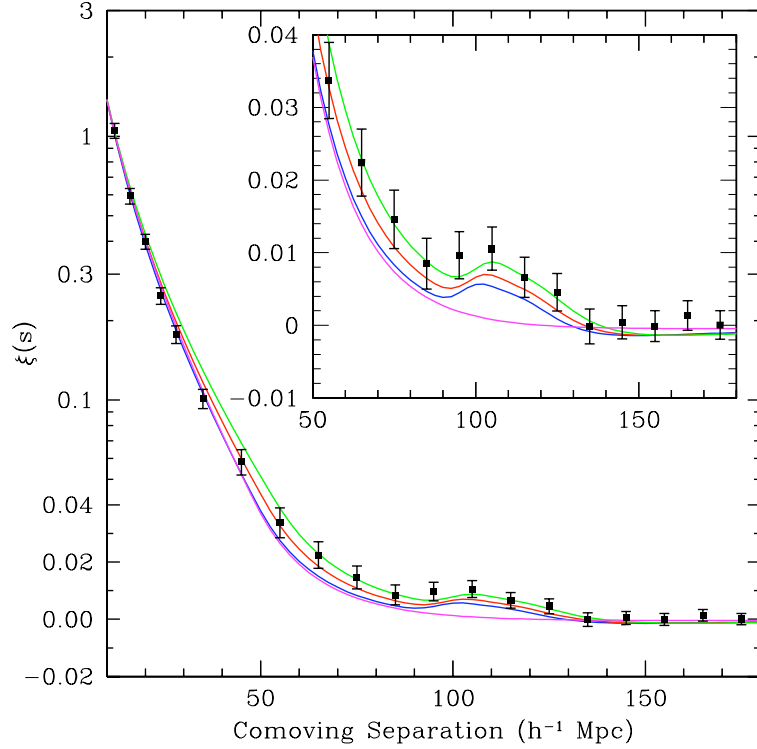


FIG. 1.3 – Fonction de corrélation des galaxies du catalogue du SDSS. Les courbes verte (en haut), rouge et bleue (en bas, avec un pic) correspondent respectivement aux modèles $\Omega_m h^2 = 0.12, 0.13, 0.14$, avec $\Omega_b h^2 = 0.024$. La courbe du bas (sans pic) correspond à un modèle de matière noire sans baryon ($\Omega_m h^2 = 0.105$). On voit très clairement la signature des BAO à $r \simeq 105 h^{-1} \text{Mpc} \simeq 150 \text{Mpc}$. Figure issue de l'article [115].

différents et indépendants, il est impressionnant qu'elles puissent mener à des mesures cohérentes : cela confirme d'une façon spectaculaire la robustesse du modèle cosmologique standard. De plus, les ellipses de contraintes associées à chacune de ces méthodes ne sont pas orientées dans la même direction, comme on peut le voir sur la figure 1.4. En combinant ces mesures, on peut donc diminuer la dégénérescence entre les différents paramètres. En procédant de la sorte, Percival *et al.* [212] ont mesuré, dans le cas d'un modèle Λ CDM, $(\Omega_m, \Omega_\Lambda) = (0.288 \pm 0.018, 0.712 \pm 0.018)$.

L'existence d'une phase d'accélération récente de l'Univers est donc bien établie. Nous savons que l'on peut modéliser la source de cette accélération par le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait, que nous avons nommé énergie noire. Nous n'avons cependant pas encore abordé la question de la nature physique de cette énergie noire. C'est ce vers quoi il nous faut à présent nous tourner.

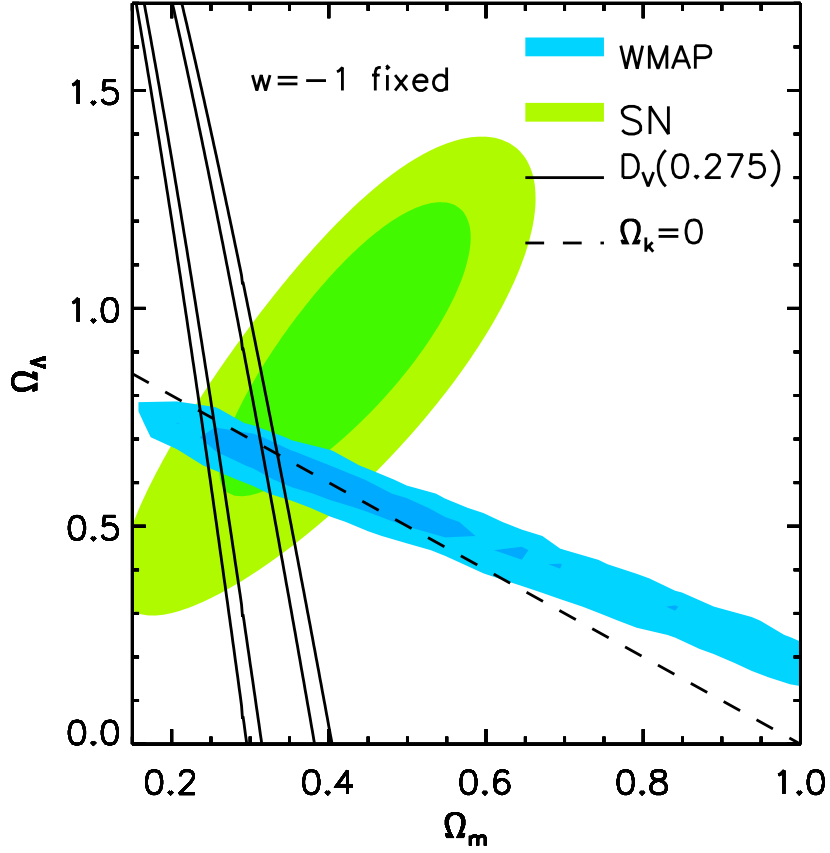


FIG. 1.4 – Combinaison des contraintes sur les paramètres $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ du modèle Λ CDM issues de la mesure de la distance luminosité des SN Ia (Union supernovae [195]), du CMB (WMAP5) et des BAO (SDSS - release 7). Les ellipses des contraintes associées des trois types de mesures sont orientées d'une façon très différente : l'association des trois observations permet donc de mesurer les paramètres $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ beaucoup plus précisément qu'avec chacune des méthodes séparément. La figure provient de [212].

1.3 Énergie noire ou gravité modifiée ?

1.3.1 Le problème de la constante cosmologique

Nous avons déjà vu que le modèle le plus simple d'énergie noire est simplement une constante cosmologique Λ telle que $\rho_\Lambda = -P_\Lambda = \Lambda/(8\pi G)$ et $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$. Le problème de ce modèle est qu'il n'explique pas vraiment l'origine physique de cette constante. La source d'énergie qui pourrait correspondre d'une façon *a priori* naturelle à une constante cosmologique est l'énergie du vide. Malheureusement, les ordres de grandeur des deux phénomènes n'ont rien en commun. La constante cosmologique est telle que la densité

correspondante vaut

$$\rho_\Lambda = 10^{-47} \text{GeV}^4. \quad (1.36)$$

On peut d'autre part évaluer la densité d'énergie du vide, qui correspond à la somme sur tous les modes, de l'énergie de point zéro $\omega_k/2$. Pour un champ scalaire, on obtient :

$$\rho_{vac} = \frac{1}{2} \int_0^{k_{max}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m^2} \simeq \frac{k_{max}^4}{16\pi^2} \quad (1.37)$$

où k_{max} est le *cutoff* de la théorie des champs que l'on considère et m la masse du champ, que l'on supposera $\ll k_{max}$. Si l'on prend pour *cutoff* l'échelle de grande unification $k_{max} = E_{GUT} = 10^{16} \text{GeV}$, on obtient

$$\rho_{vac} \simeq 10^{62} \text{GeV}^4 \gg \rho_\Lambda. \quad (1.38)$$

Le modèle de la constante cosmologique est également insatisfaisant du point de vue de l'explication de la valeur de sa densité d'énergie actuelle. Ce problème est connu sous le nom de *problème de la coïncidence* : pourquoi la densité d'énergie noire est-elle de l'ordre de la densité de la matière noire, précisément aujourd'hui, alors que les deux phénomènes ont *a priori* des origines très différentes. De plus, cette densité, très faible, doit être ajustée très précisément : c'est ce qui est appelé le problème du *fine tuning* de la constante cosmologique.

Ces difficultés d'ordre théorique (d'un point de vue phénoménologique, le modèle Λ CDM est pour l'instant en très bon accord avec les observations) ont poussé la communauté des physiciens des particules et des cosmologistes à se pencher plus en détail sur les possibles modèles d'énergie noire, au-delà du modèle de la constante cosmologique. Nous allons présenter un panorama de ces modèles (on pourra également consulter avec profit les articles [75, 211, 265]). Deux grandes catégories de modèles peuvent être distinguées : les modèles qui supposent que la RG décrit correctement les lois de la gravitation, et les modèles de gravité modifiée.

1.3.2 Modèles restant dans le cadre de la Relativité Générale

La plupart des modèles de cette catégorie consistent à prendre littéralement l'interprétation du fluide parfait (1.22) en tant qu'énergie, et à postuler l'existence d'un ou de plusieurs nouveaux champs responsables de l'accélération récente de l'Univers.

Les modèles les plus simples de cette classe sont les modèles de *quintessence* [221, 284], dans lesquelles l'énergie noire est décrite par un champ scalaire en régime de roulement lent, d'une manière tout à fait semblable à l'inflaton. L'action de ce champ scalaire φ s'écrit

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right), \quad (1.39)$$

où V est le potentiel du champ. À partir de cette action, il est facile de calculer le tenseur énergie-impulsion du champ scalaire dans un univers homogène et isotrope ; on peut alors montrer que l'équation d'état prend la forme

$$w_\varphi = \frac{\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi)}{\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi)}. \quad (1.40)$$

On peut définir les paramètres de roulements lents par

$$\epsilon \equiv \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V_{,\varphi}}{V} \right)^2, \quad \eta \equiv \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{V_{,\varphi\varphi}}{V} \right), \quad (1.41)$$

où $V_{,\varphi}$ est la dérivée du potentiel par rapport au champ scalaire. Dans la limite de *roulement lent*

$$\epsilon \ll 1, \quad \eta \ll 1, \quad (1.42)$$

le champ scalaire peut jouer le rôle d'énergie noire, avec une équation d'état $w_\varphi \simeq -1 + 2\epsilon/3$.

Le potentiel $V(\varphi)M^4e^{-\lambda\varphi}$ est un exemple intéressant de potentiel, car on peut montrer que le régime $w \simeq -1$ est un attracteur, c'est-à-dire que pour une grande plage de conditions initiales, le champ φ entrera dans le régime de roulement lent si l'on attend suffisamment longtemps. Ce mécanisme d'attraction ne résout pas le problème du *fine-tuning*, mais permet néanmoins de donner une explication naturelle au fait que l'énergie noire ait une équation d'état constante ou quasi-constante aujourd'hui.

De nombreux autres modèles existent, parmi lesquels on peut citer les modèles de *tachyon* [241, 242, 243], d'énergie noire fantomale [57, 59] ou encore de *K-essence* [23, 24, 69].

Une autre possibilité pour expliquer l'accélération *apparente* de l'Univers sans modifier les lois de la gravitation consiste à trouver un mécanisme qui modifie la façon dont nous percevons les photons qui se propagent depuis les SN Ia et autres phénomènes observables. C'est par exemple le cas lorsque les photons sont couplés à un axion, et peuvent osciller lors de la propagation dans le champ magnétique extra-galactique [78, 99, 102]. Les objets astrophysiques nous apparaissent alors plus lointains qu'ils ne le sont en réalité.

1.3.3 Modèles de gravité modifiée

Une autre approche de la question de l'énergie noire consiste à questionner la validité même de la RG. Il existe ainsi de nombreux modèles de *gravité modifiée*, dans lesquels les lois de la gravité sont différentes de la RG.

Les modèles les plus simples de modifications sont sans doute les *modifications scalaires* de la gravité dans lesquelles un champ scalaire additionnel est couplé non-minimalement à la métrique. Nous reviendrons en détail sur ces modèles à la Partie III. Un exemple de tels modèles est donné par la classe des théories scalaire-tenseur [41, 206, 276] dont l'action prend la forme

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left(F(\varphi) R - (\varphi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - 2U(\varphi) \right) + S_m[\psi_m; g_{\mu\nu}]. \quad (1.43)$$

Cette action apparaît comme une généralisation directe des modèles de quintessence décrits à l'équation (1.39), la différence étant que le champ scalaire des théories scalaire-tenseur est couplé non-minimalement à la métrique au travers de la fonction $F(\varphi)$. Il est possible de coupler le champ scalaire à d'autres invariants de courbure que le scalaire de Ricci ; on peut par exemple penser aux modèles dans lesquels le champ scalaire n'est pas couplé à R mais au terme de *Gauss-Bonnet*, $\mathcal{L}_{GB} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$. Nous n'étudierons pas plus avant ce types de modèles, mais l'on pourra se référer aux articles [9, 10, 175, 176, 183]

pour plus de détails. Notons enfin que deux modèles de modifications scalaires dont l'action possède plus de deux dérivées du champ scalaire ont récemment été proposés. Il s'agit du modèle de *Galiléon* introduit par A. Nicolis, R. Rattazzi et E. Trincherini [203] (voir également [94, 97] et [249]) et des modèles de *k-Mouflage* présentés par E. Babichev, C. Deffayet et moi-même dans l'article [27]. Nous reviendrons sur ces modèles au Chapitres 6 et 7.

Il est également possible de modifier les lois de la gravité en postulant l'existence de dimensions spatiales supplémentaires. Le modèle DGP [111] proposé par Dvali, Gabadadze et Porrati en 2000 est sans doute le plus célèbre des modèles comportant des dimensions supplémentaires et modifiant la gravité à grandes distances. Nous verrons à la Section 2.1.2 que la gravité y est 4-dimensionnelle à courtes distances et 5-dimensionnelle à grandes distances. La phénoménologie de ce modèle est très riche, notamment du point de vue cosmologique [92].

Vue de notre espace à 4 dimensions, cette théorie à 5 dimensions apparaît comme une théorie où la gravité n'est plus portée par un unique graviton sans masse, mais par une infinité de gravitons massifs. Cette idée a par la suite été étendue à un ensemble plus large de modèles, dans lesquelles la gravité trouve sa source dans une *résonance* de gravitons massifs ; ces modèles sont appelés *modèles de dégravitation* [91, 112]. Le modèle DGP et les théories de dégravitation sont donc reliés à la classe des théories de gravité massive, dans lesquelles le graviton possède une masse. Nous consacrerons la Partie II de ce mémoire à ces modèles.

Pour être intéressants d'un point de vue phénoménologique, les modèles de gravité modifiée doivent être nettement différents de la Relativité Générale, tout au moins aux échelles cosmologiques. Cependant, nous savons que la gravité dans le système solaire est très proche de la RG. Il faut donc un mécanisme qui sépare ces deux régimes. Pour l'instant, deux mécanismes de ce type sont connus : celui de *caméléon* et le mécanisme de Vainshtein. Dans les deux cas, la gravité est modifiée par un champ scalaire qui est libre de se propager à grandes distances mais qui ne joue pas de rôle au sein ou au voisinage d'objets massifs.

Nous consacrerons une partie importante de ce mémoire au mécanisme de Vainshtein, dont nous montrerons, pour la première fois, la validité dans le cadre des théories de gravité massive (Partie II). Nous l'utiliserons également pour construire la classe des théories de *k-Mouflage* (Partie III).

Enfin, il est important d'avoir à l'esprit que tout modèle de gravité modifiée réaliste doit être capable de satisfaire de fortes contraintes expérimentales, tant au niveau local qu'à des échelles cosmologiques. Nous détaillerons ces contraintes à la Partie IV.

Deuxième partie

Solutions à symétrie sphérique des théories de gravité massive

Chapitre 2

Présentation de la gravité massive

Sommaire

2.1	Motivations	40
2.1.1	Motivation “naïve” : le graviton peut-il avoir une masse ?	40
2.1.2	Modèles branaires et modifications de la gravité dans l’infrarouge	41
2.2	Le graviton massif libre	46
2.2.1	Action du graviton massif à l’ordre quadratique	46
2.2.2	Choix du terme de masse	47
2.2.3	Propagateur et discontinuité de vDVZ	48
2.3	Complétion non-linéaire et conjecture de Vainshtein	50
2.3.1	Action non-linéaire de la gravité massive	50
2.3.2	Analyse hamiltonienne	52
2.3.3	Le mécanisme de Vainshtein	56
2.4	Limite de découplage	60
2.4.1	Introduction au mécanisme de Stückelberg : le champ de Proca	60
2.4.2	Le mécanisme de Stückelberg pour la gravité massive	61
2.4.3	La normalisation canonique et la limite de découplage	64
2.4.4	Le mécanisme de Vainshtein dans la limite de découplage	65
2.4.5	Du fantôme caché dans les dérivées d’ordre supérieur	66
2.5	De la limite de découplage au cas général	68
2.5.1	Intervalle de validité de la limite de découplage	68
2.5.2	Vers une solution globale de la gravité massive	69

Dans ce chapitre, nous allons introduire une classe de modèles qui a joué un rôle particulièrement important dans ce travail de thèse : les théories de gravité massive. Après avoir présenté les motivations qui sous-tendent l’étude de ces modèles, nous définirons ce que l’on entend par gravité massive, à l’ordre quadratique dans l’action puis dans un cas plus général. Nous étudierons ensuite une limite particulière de la théorie, appelée *limite de découplage*, qui nous permettra de nous concentrer sur les non-linéarités les plus importantes à basse énergie. Nous finirons enfin ce chapitre en expliquant comment utiliser les résultats de la limite de découplage de la gravité massive pour progresser dans l’étude de la théorie complète, où toutes les interactions sont incluses.

2.1 Motivations

Avant de définir par des équations ce que l'on entend par gravité massive, nous voudrions donner au lecteur un aperçu des enjeux qui motivent l'étude de tels modèles de gravité modifiée, dans lesquels le graviton possède une masse.

2.1.1 Motivation “naïve” : le graviton peut-il avoir une masse ?

La théorie de la Relativité Générale (RG) décrit l'interaction gravitationnelle à l'aide d'une particule de spin 2 sans masse : le graviton¹. C'est ce caractère sans masse du graviton qui explique que le potentiel gravitationnel soit de portée infinie

$$V(r) \propto \frac{1}{r}. \quad (2.1)$$

Dans le cadre de la RG, l'absence de masse du graviton est la conséquence de l'invariance par changements de coordonnées (on dit également par difféomorphismes) de la théorie ; il est cependant naturel de se demander dans quelle mesure il est nécessaire d'un point de vue expérimental que le graviton soit de masse strictement nulle. Cette question, qui porte sur les principes de base de la théorie, constitue une motivation “fondamentale” pour l'étude des théories de gravité massive.

On peut ici dresser un parallèle avec les théories de spin 1. La plus simple de ces théories est l'électromagnétisme, dont la particule médiatrice est une particule de spin 1, sans masse : le photon. Là encore, en raison de la masse nulle du photon, le potentiel classique est de portée infinie, semblable au potentiel Newtonien (2.1) de la gravité. Cependant, d'un point de vue phénoménologique, il n'y a pas de raison que le photon soit de masse strictement nulle : à condition que sa masse soit suffisamment petite, un photon massif (également appelé *champ de Proca*) est tout à fait viable [5, 13, 70, 135, 181, 227]. Cela est dû au fait que l'électromagnétisme standard peut être obtenu comme la limite *continue* $m \rightarrow 0$ d'un continuum de théories où le boson médiateur est un photon massif de masse m . D'un point de vue classique, le potentiel gravitationnel créé par un photon massif n'est plus de portée infinie mais prend la forme d'un potentiel de Yukawa

$$V(r) \propto \frac{e^{-mr}}{r}. \quad (2.2)$$

Lorsque $m \rightarrow 0$, le potentiel créé par le photon massif tend continûment vers le potentiel Newtonien. D'un point de vue quantique, le vecteur abélien massif possède trois degrés de liberté. Deux de ces degrés de liberté correspondent aux hélicités ± 1 , tandis que le troisième correspond à la polarisation longitudinale du vecteur massif. On peut montrer [159] que lorsque la masse du vecteur tend vers zéro, le mode longitudinal n'est plus couplé aux autres champs, et ne joue donc aucun rôle. Ainsi, non seulement l'action, mais également les équations du mouvement et toutes les observables (classiques et quantiques)

¹La notion de graviton provient des équations du mouvement linéaires pour la perturbation de la métrique $h_{\mu\nu}$ autour de la métrique de Minkowski ; ces équations sont schématiquement de la forme $\square h_{\mu\nu} = 0$, c'est-à-dire des équations de propagation, sans terme de masse. Par analogie avec les particules du modèle standard, le champ $h_{\mu\nu}$ qui se propage est appelé graviton. La théorie non-linéaire qu'est la RG peut alors être vue comme la seule complétion non-linéaire cohérente de la théorie de graviton libre, lorsque celui-ci est couplé à une source [103, 260] (voir également [216] pour une approche comparable de la gravité massive).

tendent continûment vers le cas $m = 0$. C'est pourquoi un photon de masse très faible est essentiellement indifférenciable d'un photon de masse nulle, et reste donc acceptable expérimentalement.

La situation est plus compliquée pour les théories non-abéliennes d'une particule de spin 1 (théories de Yang-Mills (YM)). À l'ordre des arbres, le résultat est similaire au cas du photon : les observables impliquant un champ de YM massif tendent continûment vers celle d'un champ de YM sans masse. Ceci n'est plus vrai lorsque les corrections quantiques sont prises en compte. Un calcul à une boucle permet ainsi de montrer [270] que le propagateur du vecteur de YM massif ne tend pas vers celui du vecteur sans masse ; ceci est dû au fait que la polarisation longitudinale peut jouer un rôle au sein des boucles, et ne se trouve donc pas complètement découplée des autres champs lorsque $m \rightarrow 0$.

Après cette rapide présentation des champs de spin 1, il semble naturel de se demander ce qu'il en est dans le cas du graviton. Il se trouve que la différence entre les théories sans masse et massive est encore plus marquée. En effet, comme nous le verrons en détail par la suite, au niveau linéaire tout au moins, le graviton sans masse de la RG ne peut en aucune façon être vu comme la limite continue d'une famille de gravitons massifs dont la masse tend vers 0, et ce dès la théorie classique. Cette discontinuité, dite *discontinuité de van Dam Veltman Zakharov (vDVZ)*, rend la gravité massive linéarisée non viable d'un point de vue expérimental. Nous laissons pour la suite la discussion détaillée de cette discontinuité de vDVZ et du mécanisme de Vainshtein censé résoudre le problème. Nous nous contentons pour l'instant d'insister sur le fait que l'étude du graviton massif s'inscrit dans un cadre plus général qui consiste à essayer de décrire d'une façon cohérente des particules massives de spin 0, 1, 2 ou plus, et de comprendre comment ces théories sont reliées aux cas de masse nulle. Comme nous l'avons vu, pour les spins $s \leq 1$, les théories massives tendent continûment vers les théories de masse nulle tandis que la situation est plus compliquée pour le graviton et pour les particules de spin plus grand, ce qui motive une étude plus approfondie de ces questions. Nous nous concentrerons dans cette thèse au cas $s = 2$, c'est à dire au graviton, mais il est à noter que l'étude des représentations massives et de masse nulle des théories dites de "spins élevés" ($s \geq 2$) est un domaine de recherche très actif (pour plus de détails, on pourra se reporter aux revues [37, 255] ; en ce qui concerne la discontinuité de vDVZ, on consultera avec profit les articles [124, 125]).

2.1.2 Modèles branaires et modifications de la gravité dans l'infrarouge

Au-delà des motivations "fondamentales" évoquées dans la section précédente, les théories de gravité massive ont fait l'objet d'une attention renouvelée depuis une dizaine d'années, en raison du rôle important qu'elles jouent dans le cadre des théories branaires de la gravité. Dans ces théories, notre monde est une hypersurface de dimension 4, appelée *brane*, plongée dans un espace plus grand, le *bulk*, de dimension au moins 5. La possibilité que notre espace comporte plus de 4 dimensions était bien entendu connue depuis longtemps, notamment en théorie des cordes. Cependant, il s'agissait généralement de dimensions supplémentaires compactes et de petite taille ; dans ce cas, à basse énergie, le graviton apparaît comme étant sans masse. La nouveauté introduite par les mondes branaires a consisté à considérer des dimensions de grande taille, voire de taille infinie. Bien sûr, dans

ces modèles, les champs du modèle standard doivent être confinés sur la brane pour satisfaire d'évidentes contraintes phénoménologiques, et de ce fait restent 4-dimensionnels. La gravité, quant à elle, "voit" les dimensions supplémentaires, et se comporte comme un graviton à 5 dimensions. Vue de la brane, la gravité peut être décrite, dans certains cas du moins, par la théorie d'un graviton massif, ou plus précisément par une *résonance* de gravitons massifs.

Décomposition de Kaluza-Klein

Pour comprendre plus en détail pourquoi la présence de dimensions spatiales supplémentaires s'accompagne de gravitons massifs dans certains cas et pas dans d'autres, il nous faut introduire le concept de modes de Kaluza-Klein (KK). Considérons dans un premier temps le cas d'une dimension supplémentaire compacte circulaire, de taille L . Appelons x^μ les 4 coordonnées de l'espace usuel, et y la coordonnée de la dimension supplémentaire. Soit ϕ un champ scalaire à 5 dimensions, satisfaisant l'équation de Klein-Gordon (KG) sans masse

$$\square_5 \phi(x^\mu; y) = 0, \quad (2.3)$$

avec la convention $\square_5 \equiv \square_4 + \partial_y^2 = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 + \partial_y^2$. La condition de circularité de la dimension supplémentaire se traduit alors par la périodicité de ϕ

$$\phi(x^\mu; y + L) = \phi(x^\mu; y), \quad (2.4)$$

ce qui permet de décomposer le champ en série de Fourier

$$\phi(x^\mu; y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x^\mu) e^{i \frac{2n\pi y}{L}}, \quad (2.5)$$

chaque mode de Fourier étant solution d'une équation de KG à quatre dimensions

$$\square_4 \phi_n(x^\mu) - \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 \phi_n(x^\mu) = 0. \quad (2.6)$$

D'un point de vue 4-dimensionnel, la présence d'une dimension supplémentaire se traduit donc par une "tour" de modes massifs², de masses $m = 2n\pi/L$.

Il faut noter qu'il y a toujours un mode zéro, de masse nulle ($n = 0$) ; si la dimension supplémentaire est suffisamment petite, la masse $2\pi/L$ des premiers modes massifs ($n = \pm 1$) est beaucoup plus grande que les échelles d'énergie que l'on peut tester expérimentalement : le seul mode observable est alors le mode zéro, qui est sans masse. Si l'on suppose que les particules du modèle standard (MS) peuvent se propager dans les dimensions supplémentaires, cela implique donc que la taille typique L de ces dimensions doit être telle que

$$L \ll 10^{-16} \text{ m}, \quad (2.7)$$

si l'on considère que le modèle standard a été bien testé jusqu'à l'échelle d'énergie du TeV. Nous verrons à la Section 8.1.1 que la gravité n'est quant à elle testée qu'à partir de l'échelle macroscopique du dixième de millimètre. Cela veut donc dire qu'il n'est

²Nous traduisons ici littéralement l'expression anglaise "tower of massive modes".

pas possible d'observer, à l'aide d'expériences gravitationnelles, la présence de dimensions supplémentaires dans lesquelles les particules du MS pourraient se propager, car ces dimensions sont beaucoup trop petites. Si l'on veut modifier la gravité d'une façon observable à l'échelle macroscopique, il est donc nécessaire de considérer des modèles branaires, dont les dimensions supplémentaires sont de grande taille, voire infinies, et dans lesquels les champs du modèle standard sont confinés sur la brane.

Modèles branaires dominés dans l'infrarouge par un mode zéro sans masse

En 1998, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos et G. Dvali (ADD) [19, 20] ont proposé³ un modèle branaire dont les n dimensions supplémentaires sont compactes mais de grande taille, exploitant ainsi le fait que la gravité n'est pour l'instant testée qu'à partir du dixième de millimètre (*cf.* Section 8.1.1), c'est-à-dire à des échelles de longueurs bien plus importantes que celles explorées par les accélérateurs de particules. Dans ce modèle, à des distances plus grandes que le rayon R des dimensions supplémentaires, seul le mode de KK sans masse joue un rôle : la gravité est quasiment 4-dimensionnelle. À l'inverse, pour des très courtes distances, de nombreux modes de KK entrent en jeu, et la gravité est $(4+n)$ D. Le rayon R qui est l'échelle à laquelle la gravité passe de 4D à $(4+n)$ D est choisi de l'ordre du dixième de millimètre, de façon à satisfaire les contraintes expérimentales sur la force gravitationnelle (voir [7] pour une revue des tests expérimentaux de la loi en $1/r^2$ de la force gravitationnelle à petite distance, et [231] pour des résultats récents). La motivation principale de ce modèle est qu'il offre une possibilité de résoudre le problème de la hiérarchie, qui consiste à se demander pourquoi l'échelle M_P de la gravitation est si grande comparée à l'échelle électro-faible. En effet, si l'on calcule dans le modèle ADD [19] la force gravitationnelle entre deux masses ponctuelles séparées par une distance $r \gg R$, il apparaît que la masse de Planck effective à 4D, M_P , est reliée à la masse de Planck "fondamentale" $M_{P(4+n)}$ de la théorie à $(4+n)$ dimensions par

$$M_P^2 \sim R^n \times M_{P(4+n)}^{n+2}. \quad (2.8)$$

Cela permet d'avoir une échelle fondamentale pour la gravité de l'ordre de l'échelle électro-faible $M_{P(4+n)} \sim \text{TeV}$ tout en gardant une échelle de Planck effective à 4D de l'ordre de 10^{19}GeV . Il se trouve que pour $n = 2$, si l'on veut que $M_{P(4+n)} \sim \text{TeV}$, R doit être de l'ordre de 0.1 mm. Que l'échelle R soit à la portée des expériences rend le modèle très intéressant d'un point de vue phénoménologique.

Au lieu de considérer des dimensions supplémentaires compactes, L. Randall and R. Sundrum (RS) [219, 220] ont proposé en 1999 deux modèles branaires comportant une dimension supplémentaire infinie et dans lesquels le bulk est un espace anti-de Sitter (AdS) à 5D, de courbure $\Lambda < 0$. Dans le cas d'une brane sans matière, on trouve que l'élément de distance du bulk s'écrit

$$ds^2 = e^{-2|y|/\ell} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad \text{où} \quad \Lambda = -6\ell^{-2}. \quad (2.9)$$

La compactification est remplacée ici par le facteur $e^{-2|y|/\ell}$, c'est-à-dire par la structure AdS du *bulk*, qui fait que même si y varie de $-\infty$ à $+\infty$, le volume à 5D reste fini. La

³Voir également [16] pour une possible inclusion de ce modèle au sein de la théorie des cordes.

décomposition en mode de KK [130] est bien entendu différente de celle que nous avons présentée dans le cas d’une dimension compacte, puisque dans le cas d’une dimension infinie, la somme de l’Eq. (2.5) est remplacée par une intégrale, et que des modes zéro additionnels peuvent être présents. C’est précisément le cas du modèle RS, dans lequel la gravitation est portée par un mode sans masse normalisable qui domine à basse énergie, et un continuum de modes massifs qui traduisent les corrections dues à la dimension supplémentaire.

Nous avons donc vu que dans les modèles branaires ADD et RS, la gravité est très proche de la RG à basse énergie, du fait de la présence d’un mode zéro dominant. Il apparaît donc que pour avoir une gravité proprement massive, il ne faut pas que le spectre du graviton soit dominé par un mode zéro sans masse. C’est précisément le cas du modèle “DGP” vers lequel nous nous tournons à présent.

Gravité induite : le modèle DGP

Le modèle branaire DGP [111], proposé en 2000 par G. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, est un modèle branaire de gravité à 5D, la 5ème dimension étant infinie et le *bulk* plat ; la particularité du modèle tient à la présence dans l’action, en plus du terme de gravité à 5D, d’un terme de gravité à 4D induit sur la brane⁴, de sorte que l’action totale s’écrit

$$S = M_{(5)}^3 \int d^5 X \sqrt{G} \mathcal{R}_{(5)} + M_P^2 \int d^4 x \sqrt{g} R + S_{matière}, \quad (2.10)$$

où $M_{(5)}$ est la masse de Planck à 5D et M_P la masse de Planck à 4D. Les coordonnées en majuscules sont utilisées pour les coordonnées à 5D, tandis que les minuscules, ainsi que les indices grecs, sont réservées pour l’espace à 4D ; la coordonnée de la dimension supplémentaire est notée y , et il est supposé que la brane est située en $y = 0$. La métrique à 5D est notée G_{AB} , et le scalaire de Ricci associé $\mathcal{R}_{(5)}$; la métrique à 4D induite sur la brane est notée $g_{\mu\nu}(x)$, et le scalaire de Ricci associé R . Enfin, le *bulk* est supposé vide, à part sur la brane où est localisée la matière. La présence des deux termes de gravités, à 4 et 5D, permet d’avoir une intéressante transition entre un régime de type 4-dimensionnel à courtes distances, où le potentiel gravitationnel ressemble au potentiel Newtonien

$$V(r) \sim \frac{1}{r}, \quad (2.11)$$

et un régime 5-dimensionnel à grandes distances dans lequel

$$V(r) \sim \frac{1}{r^2}. \quad (2.12)$$

La transition entre les deux régimes a lieu à l’échelle caractéristique

$$r_c \equiv \frac{M_P^2}{2M_{(5)}^3} \quad (2.13)$$

⁴Un tel terme est compatible avec les symétries non brisées par la présence de la brane, et peut donc être éventuellement généré par des corrections quantiques à l’action 5D, menant à l’action effective (2.10).

qui sera généralement prise de l'ordre du rayon de Hubble : $r_c \sim c/H_0$. La phénoménologie et la cosmologie de ce modèle se sont révélées très riches [92, 93, 95, 109, 110, 180, 186, 187, 189]. En particulier, on peut montrer [92] que l'équivalent de l'équation cosmologique de Friedmann pour un espace plat s'écrit

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_b + \epsilon \frac{H}{r_c} \quad (2.14)$$

où $\epsilon \equiv \pm 1$, $G \equiv 1/(8\pi M_P^2)$ et ρ_b est la densité de matière sur la brane. Pour $\epsilon = 1$, l'évolution de l'univers ressemble à celle d'un modèle Λ CDM : après une phase durant laquelle $H^2 \sim \frac{8\pi G}{3}\rho_b$ (ère de matière), l'univers rentre dans une phase dominée par un terme constant $H \sim H_{auto} \equiv 1/r_c$ (ère d'accélération dominée par une constante cosmologique). La présence de cette solution cosmologique *auto-accélératrice* permet d'envisager d'expliquer l'accélération de l'univers observée actuellement sans avoir recours à une constante cosmologique ou à une mystérieuse énergie noire. Cependant, des questions demeurent sur la validité de cette solution, liées à l'existence d'un *cutoff* à basse énergie [64, 98, 136, 138, 178, 179, 188].

Pour comprendre la relation entre le modèle DGP et la gravité massive, il s'agit de procéder à une décomposition spectrale du graviton, et de voir dans quelle mesure les modes massifs jouent un rôle prépondérant. Pour cela, on peut par exemple utiliser une décomposition de Källen-Lehmann ou de KK du propagateur dans l'espace de Fourier à 4D. Si l'on met de côté pour des raisons de simplicité sa structure tensorielle, ce propagateur s'écrit [111] pour une brane située en $y = 0$

$$G_R(p, y = 0) = \frac{1}{p^2 + 2r_c^{-1}p}, \quad (2.15)$$

où p est la norme de l'impulsion à 4D ; pour de petites distances $r \ll r_c$ (c'est-à-dire pour de grandes impulsions $p \gg 1/r_c$), le propagateur est celui d'un graviton sans masse à 4D : $G_R \sim 1/p^2$, tandis qu'à grandes distances $r \gg r_c$ (c'est-à-dire pour des impulsions IR $p \ll 1/r_c$), le propagateur est celui d'un graviton sans masse à 5D : $G_R \sim r_c/p$. La décomposition en modes de KK s'écrit

$$G_R(p, y = 0) = \int_0^\infty dm \frac{2}{\pi} \frac{2r_c}{4 + m^2 r_c^2} \frac{1}{p^2 + m^2}. \quad (2.16)$$

Contrairement aux autres modèles précédemment évoqués (ADD et RS), il n'y a pas ici de mode zéro sans masse qui dominerait à basse énergie : vue de la brane, la gravité est décrite par une *résonance* de gravitons massifs. Ainsi, si l'on veut comprendre en détails le modèle DGP, il est important de bien comprendre comment chaque mode massif se comporte. En particulier, la discontinuité de vDVZ est également présente dans le modèle DGP, pour les mêmes raisons que dans les théories de gravité massive, et on peut espérer qu'étudier la validité du mécanisme de Vainshtein dans le cadre de la gravité massive sera utile pour l'étude du même mécanisme dans le modèle DGP⁵.

⁵Il convient cependant de ne tirer de conclusion de l'étude de chaque mode massif qu'avec précaution : la sommation infinie de modes massifs peut changer radicalement certaines propriétés [107, 108]. Ainsi, il est bien connu que chaque graviton massif contient un degré de liberté fantomal à l'ordre non-linéaire, alors que le graviton du modèle DGP en est dépourvu.

2.2 Le graviton massif libre

Nous souhaitons à présent donner une définition plus précise de la gravité massive. Pour ce faire, nous allons d'abord nous pencher vers ce que serait une possible théorie d'un graviton massif libre ; nous allons alors montrer que la théorie à l'ordre quadratique dans l'action (graviton libre) est unique, et que le terme de masse a une forme spécifique, dite de Pauli-Fierz. Nous verrons ensuite que cette théorie mène à des observables incompatibles avec l'expérience, même si la masse m du graviton tend vers 0 : c'est la discontinuité de van Dam-Veltman-Zakharov (vDVZ).

2.2.1 Action du graviton massif à l'ordre quadratique

Essayons d'écrire ce que serait l'action d'un graviton massif libre. Ce dernier est décrit par un tenseur symétrique à deux indices $h_{\mu\nu}$ qui peut être vu comme une perturbation autour d'une métrique de fond $f_{\mu\nu}$ que nous considérerons dans la plupart des cas comme étant plate⁶ ; dans cette section, nous allons de plus supposer que $f_{\mu\nu}$ est exactement la métrique de Minkowski : $f_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Nous ferons également l'hypothèse que la théorie ne brise pas l'invariance de Lorentz, ni explicitement, ni spontanément, bien que de telles théories aient été étudiées dans la littérature [18, 106, 250, 251, 275] (voir également [226] pour une revue).

Il nous faut tout d'abord un terme cinétique ; il s'agit du terme cinétique d'une particule de spin 2 (avec ou sans masse) et on peut montrer [271] qu'il correspond à l'action de la RG à l'ordre quadratique. Le terme de masse doit quant à lui être un scalaire formé à partir de $h_{\mu\nu}$ et $f_{\mu\nu}$, sans dérivée et quadratique en h . Seuls deux termes sont possibles : $h_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$ et h^2 , où les indices sont montés à l'aide de la métrique f et où $h \equiv h^\mu_\mu$ est la trace du graviton. Enfin, on supposera un couplage linéaire à la matière. L'action du graviton massif libre s'écrit donc

$$S_2 = \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \left\{ \left(\frac{1}{2} h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\sigma h^\sigma_\mu + \frac{1}{4} h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{4} h \square h \right) + \frac{m^2}{4} (\gamma h^2 - h_{\mu\nu} h^{\mu\nu}) \right\} + \frac{1}{2} \int d^4x T_{\mu\nu} h^{\mu\nu}, \quad (2.17)$$

où γ est pour l'instant un paramètre arbitraire. On obtient facilement les équations du mouvement suivantes :

$$-\square h_{\mu\nu} + h^\lambda_{\mu,\lambda\mu} + h^\lambda_{\nu,\lambda\nu} - \eta_{\mu\nu} h^\kappa_{,\kappa\lambda} - h_{,\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \square h + m^2 (h_{\mu\nu} - \gamma \eta_{\mu\nu} h) = 16\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

où l'on rappelle que $8\pi G \equiv M_P^{-2}$. La divergence de l'équation (2.18) mène à la relation

$$h^\nu_{\mu\nu} = \gamma h_{,\mu} + \frac{16\pi G}{m^2} T^\nu_{\mu\nu}. \quad (2.19)$$

On peut ensuite prendre la trace de l'Eq. (2.18), et utiliser l'Eq. (2.19) pour obtenir

$$2(1 - \gamma)\square h + m^2(1 - 4\gamma)h = 16\pi G \left(T + \frac{2}{m^2} T^{\mu\nu}_{\mu\nu} \right). \quad (2.20)$$

⁶Il est important de noter qu'une telle métrique de fond $f_{\mu\nu}$ est indispensable [49]. En effet, dans le cas des spins 0 ou 1, les particules sont décrites comme des excitations autour du vide. Dans le cas du spin 2, le "vide" n'existe pas (au sens où le tenseur nul n'est pas une métrique acceptable) : il est donc nécessaire de se munir d'une métrique de fond $f_{\mu\nu}$, autour de laquelle on considérera l'évolution de perturbations $h_{\mu\nu}$.

On peut de plus supposer que le tenseur énergie-impulsion de la source est conservé par rapport à la métrique $\eta_{\mu\nu}$, ce qui est nécessairement le cas si l'on demande que l'action de la matière $S_{matière}$ soit invariante par changement de coordonnées ; ceci implique que $T_{\mu\nu}^{\nu} = 0$ et les deux équations précédentes se simplifient en

$$h_{\mu\nu}^{\nu} = \gamma h_{,\mu}, \quad (2.21)$$

$$2(1 - \gamma)\square h + m^2(1 - 4\gamma)h = 16\pi GT. \quad (2.22)$$

Deux cas se distinguent très clairement : $\gamma \neq 1$ et $\gamma = 1$.

2.2.2 Choix du terme de masse

Pour $\gamma \neq 1$, en utilisant les équations (2.21) et (2.22) pour simplifier les équations du mouvement (2.18) et en passant dans l'espace de Fourier, on obtient pour une source conservée

$$h_{\mu\nu} = 16\pi G \left[\frac{1}{p^2 + m^2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} T \eta_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{6} \eta_{\mu\nu} \frac{1}{p^2 + m_0^2} T + \frac{2\gamma - 1}{2(1 - \gamma)} \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{1}{p^2 + m_0^2} p_\mu p_\nu T \right], \quad (2.23)$$

où

$$m_0^2 \equiv m^2 \frac{4\gamma - 1}{2(1 - \gamma)}. \quad (2.24)$$

On peut montrer qu'il se propage 6 degrés de liberté : 2 modes scalaires (hélicité 0), 1 mode vectoriel (hélicité ± 1 – qui correspond à deux degrés de liberté), et à un mode tensoriel (hélicité ± 2 – qui correspond également à deux degrés de liberté) ; les quatre autres degrés de liberté (deux scalaires et un vecteur) qui sont a priori contenus dans le tenseur symétrique $h_{\mu\nu}$ ne se propagent pas, à cause des contraintes (2.21). Si l'on calcule l'amplitude entre deux sources conservées $T_{\mu\nu}$ et $T'_{\alpha\beta}$, on obtient

$$\mathcal{A}_m^{(\gamma \neq 1)}(p) = -8\pi G \left[\frac{1}{p^2 + m^2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} T \eta_{\mu\nu} \right) T'^{\mu\nu} - \frac{1}{6} \frac{1}{p^2 + m_0^2} T T' \right]. \quad (2.25)$$

L'expression équivalente en RG (voir par exemple [238], p. 78) s'écrit

$$\mathcal{A}_0(p) = -\frac{8\pi G}{p^2} \left[\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T \eta_{\mu\nu} \right) T'^{\mu\nu} \right], \quad (2.26)$$

ce qui permet de voir que l'amplitude (2.25) tend continûment vers l'amplitude (2.26) lorsque $m \rightarrow 0$: les deux degrés de libertés scalaires s'annulent l'un l'autre, et seul le mode tensoriel reste, semblable à celui de la RG⁷. Malheureusement, si ces deux modes scalaires peuvent se compenser, c'est parce que l'un des deux est en fait un fantôme. On peut en effet montrer que le terme

$$16\pi G \left(-\frac{1}{6} \eta_{\mu\nu} \frac{1}{p^2 + m_0^2} T \right) \quad (2.27)$$

⁷ Les modes vectoriels, ne jouent quant à eux pas de rôle, car il ne peuvent pas interagir avec des sources conservées.

dans l'équation (2.23) signale la présence d'un fantôme, car son signe est opposé aux signes des autres termes (ce qui correspond au fait que terme cinétique d'un fantôme a un signe opposé au terme cinétique canonique). La présence de ce fantôme rend tout terme de masse avec $\gamma \neq 1$ non physique, et si nous voulons construire une théorie satisfaisante, il nous faut donc nous tourner vers le cas $\gamma = 1$.

Pour $\gamma = 1$, l'équation (2.22) est une équation de contrainte (*i.e.* sans terme de propagation), qui fixe la trace du graviton en fonction de la source :

$$h = -\frac{16\pi G}{3m^2}T. \quad (2.28)$$

Cette contrainte vient s'ajouter aux quatre contraintes issues de l'Eq. (2.21), ne laissant se propager que 5 degrés de liberté. En particulier, en présence d'une source conservée, le champ prend la forme

$$h_{\mu\nu} = 16\pi G \left[\frac{1}{p^2 + m^2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}T\eta_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{3} \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} T \right], \quad (2.29)$$

où il apparaît qu'il n'y a plus de degré de liberté fantomal⁸. Ce terme de masse avec $\gamma = 1$ est appelé terme *de Pauli-Fierz* (PF) [121, 123], et constitue donc la seule combinaison des deux termes $h_{\mu\nu}^2$ et h^2 qui assure qu'il n'y ait pas de fantôme à l'ordre linéaire ; dorénavant, nous nous concentrerons sur cette forme du terme de masse.

2.2.3 Propagateur et discontinuité de vDVZ

Afin de comprendre en détail la nature des degrés de liberté dans le cas de PF, il est intéressant de déterminer le propagateur du graviton massif. Pour ce faire, on utilise les équations (2.18), (2.19) et (2.20) avec $\gamma = 1$; on obtient

$$h_{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{p^2 + m^2} \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}T\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\alpha}{m^2} T_{\alpha\nu} - \frac{p_\nu p_\alpha}{m^2} T_{\alpha\mu} + \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu} \frac{p^\alpha p^\beta}{m^2} T_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} T + \frac{2}{3} \frac{p^\alpha p^\beta p_\mu p_\nu}{m^4} T_{\alpha\beta} \right]. \quad (2.30)$$

Si l'on définit le propagateur massif par

$$h_{\mu\nu}(p) = D_{\mu\nu}^{(m),\alpha\beta}(p) T_{\alpha\beta}(p), \quad (2.31)$$

on trouve

$$D_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(m)}(p) = \frac{16\pi G}{p^2 + m^2} \left[\frac{1}{2} (\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} \left(\eta_{\mu\alpha} \frac{p_\nu p_\beta}{m^2} + \eta_{\nu\alpha} \frac{p_\mu p_\beta}{m^2} + \eta_{\mu\beta} \frac{p_\nu p_\alpha}{m^2} + \eta_{\nu\beta} \frac{p_\mu p_\alpha}{m^2} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right) \left(\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} - \frac{p_\alpha p_\beta}{m^2} \right) \right]. \quad (2.32)$$

⁸Dans ce mémoire, nous traduirons l'expression anglaise *ghost-like* par *fantomal*.

La première ligne correspond à l'hélicité ± 2 , la seconde à l'hélicité ± 1 et la dernière au mode scalaire, ce qui fait un total de 5 degrés de liberté. On peut ensuite calculer l'amplitude entre deux sources conservées :

$$\mathcal{A}_m^{(PF)}(p) = -\frac{1}{2}T_{\mu\nu}D_{(m)}^{\mu\nu,\alpha\beta}T'_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{p^2 + m^2} \left[\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T\eta_{\mu\nu} \right) T'^{\mu\nu} + \frac{1}{6}TT' \right]. \quad (2.33)$$

L'interprétation de l'expression précédente est claire : en plus du mode tensoriel dont la contribution est la même qu'en RG, un degré de liberté supplémentaire est échangé : un mode scalaire qui couple à la trace des tenseurs énergie-impulsion. Le mode vectoriel ne joue quant à lui pas de rôle car il n'est pas couplé aux sources conservées. Le degré de liberté scalaire additionnel ne découple pas dans la limite $m \rightarrow 0$: l'interaction entre deux sources ne tend pas vers l'interaction de la RG, aussi petite la masse du graviton soit-elle. Il s'agit de la discontinuité de van Dam-Veltman-Zakharov (vDVZ) [270, 292].

Cette discontinuité a des conséquences très importantes. Ainsi, si l'on calcule le potentiel gravitationnel entre deux sources ponctuelles statiques M_1 et M_2 séparées d'une distance r , on trouve

$$V_m(r) = -\frac{4}{3} \frac{GM_1 M_2}{r} e^{-mr}, \quad (2.34)$$

au lieu de l'habituel résultat Newtonien

$$V_0(r) = -\frac{GM_1 M_2}{r}. \quad (2.35)$$

Le facteur $4/3$, qui reste présent même dans la limite $m \rightarrow 0$, est la conséquence de l'échange du mode scalaire additionnel ; on pourrait penser pouvoir redéfinir la constante de Newton :

$$\tilde{G} = \frac{4}{3}G, \quad (2.36)$$

de façon à absorber ce facteur et à obtenir le potentiel gravitationnel Newtonien. Cependant, dans ce cas là, la déviation de la lumière autour de sources massives serait incorrecte. En effet, le mode scalaire est couplé à la trace des tenseurs énergie-impulsion, qui est nulle dans le cas du rayonnement. Cela signifie donc que l'expression (2.33) donne le bon résultat pour l'interaction lumière-matière seulement pour $\tilde{G} = G$. Si l'on redéfinissait la constante de Newton comme dans (2.36), la déviation de la lumière différerait du résultat relativiste de 25%, ce qui est en contradiction flagrante avec l'expérience.

À ce stade, il semble donc que le graviton massif ne puisse pas rendre compte d'une façon satisfaisante des observations dans le système solaire⁹. Cependant, il faut se rappeler que nous nous sommes penchés uniquement sur le graviton libre, c'est-à-dire

⁹Notons cependant que la discontinuité de vDVZ qui rend le régime linéaire incompatible avec les observations est une particularité des modèles de gravité massive dont la métrique de fond est plate. En effet, il est possible de montrer [145, 146, 174, 217] que lorsque la métrique de fond $f_{\mu\nu}$ correspond à une métrique de de Sitter (dS) ou anti-de Sitter (AdS), la discontinuité de vDVZ n'est pas présente (notons qu'un fantôme se propage dans le cas de de Sitter).

que nous avons tronqué l'action à l'ordre quadratique. Il nous faut maintenant nous tourner vers les possibles complétions non-linéaires de la théorie pour savoir si la discontinuité de vDVZ demeure lorsque les auto-interactions du graviton sont prises en compte.

2.3 Complétion non-linéaire et conjecture de Vainshtein

Nous allons donc à présent chercher à étendre la théorie libre introduite ci-dessus, en incluant les possibles auto-interactions du graviton. Nous verrons que la complétion du terme cinétique peut être choisie en s'inspirant de l'action de la RG et que celle du terme de masse peut prendre une infinité de formes, conduisant à autant de théories de gravité massive. Une analyse hamiltonienne nous permettra ensuite de mettre en évidence l'apparition d'un sixième degré de liberté fantomal à l'ordre non-linéaire. Enfin, nous présenterons la conjecture de Vainshtein, selon laquelle les non-linéarités de la théorie permettent de retrouver la RG au voisinage d'un corps massif.

2.3.1 Action non-linéaire de la gravité massive

À l'ordre non-linéaire, au lieu de considérer une perturbation $h_{\mu\nu}$ autour d'une métrique de fond $f_{\mu\nu}$, on va chercher à écrire l'action pour deux métriques en interaction : une métrique dynamique $g_{\mu\nu}$ et une métrique de fond $f_{\mu\nu}$, supposée fixée. Le graviton est alors défini comme

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - f_{\mu\nu}. \quad (2.37)$$

Nous choisirons l'action d'Einstein-Hilbert pour la métrique g comme généralisation non-linéaire du terme cinétique de l'action (2.17), afin de retrouver l'action de la RG lorsque le terme de masse s'annule. Le terme de masse peut quant à lui prendre une infinité de formes, à condition qu'à l'ordre quadratique en $h_{\mu\nu}$ il prenne la forme du terme de masse de PF. La matière est supposée minimalement couplée à la métrique g . Enfin, l'on souhaite que l'action soit invariante sous les difféomorphismes communs aux deux métriques, tels que

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu x'^\sigma(x) \partial_\nu x'^\tau(x) g'_{\sigma\tau}(x'(x)) , \\ f_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu x'^\sigma(x) \partial_\nu x'^\tau(x) f'_{\sigma\tau}(x'(x)) . \end{aligned} \quad (2.38)$$

L'action s'écrit alors

$$S = S_{EH}[g] + S_{int}[f, g] + S_{matière}[g], \quad (2.39)$$

avec

$$S_{EH}[g] \equiv \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R[g] \quad (2.40)$$

et

$$S_{int}[f, g] \equiv -\frac{M_P^2}{2} \frac{m^2}{4} \int d^4x \mathcal{V}^{(a)}(g, f) \equiv -\frac{M_P^2}{2} \frac{m^2}{4} \int d^4x \sqrt{-g} V^{(a)}(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{f}). \quad (2.41)$$

La forme spécifique $\mathcal{V}^{(a)}(g, f) \equiv \sqrt{-g} V^{(a)}(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{f})$ du “potentiel scalaire” d'interaction entre les deux métriques est imposé par la symétrie par difféomorphisme (2.38) : on peut en effet montrer [85] que cette symétrie impose à la densité $V^{(a)}$ de ne dépendre que de la combinaison $\mathbf{g}^{-1}\mathbf{f}$. Deux exemples de tels potentiels, que nous retrouverons tout au long

des prochains chapitres, ont été considérés respectivement par Boulware et Deser (BD) dans l'article [49] et par Arkani-Hamed *et al.* (AGS) dans l'article [21]

$$S_{int}^{(BD)} = -\frac{M_P^2}{2} \frac{m^2}{4} \int d^4x \sqrt{-f} h_{\mu\nu} h_{\sigma\tau} (f^{\mu\sigma} f^{\nu\tau} - f^{\mu\nu} f^{\sigma\tau}), \quad (2.42)$$

$$S_{int}^{(AGS)} = -\frac{M_P^2}{2} \frac{m^2}{4} \int d^4x \sqrt{-g} h_{\mu\nu} h_{\sigma\tau} (g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} - g^{\mu\nu} g^{\sigma\tau}), \quad (2.43)$$

où $f^{\mu\nu}$ and $g^{\mu\nu}$ correspondent aux métriques inverses de $f_{\mu\nu}$ and $g_{\mu\nu}$.

Remarquons qu'il peut être tentant d'ajouter à l'action (2.39) un terme cinétique $S_{EH}[f]$ et un terme de potentiel pour f . Ceci est tout à fait possible : la théorie devient alors une théorie de *bigravité*. Ce type de théories a été bien étudié dans la littérature [46, 47, 83, 84, 157, 158, 228], et a l'avantage de ne pas fixer *a priori* la métrique de fond f . On peut alors imaginer qu'au lieu d'être choisie arbitrairement, la métrique plate correspond à une solution des équations du mouvement. Dans la mesure où la dynamique de f est gelée (par exemple si la masse de Plank associée à son terme cinétique est très grande), on retrouve une théorie de gravité massive pour la seule métrique dynamique restante : la métrique g . Dans cette thèse, nous ne considérerons pas plus avant les théories de bigravité, mais il est intéressant d'avoir à l'esprit que ce que les théories que nous appelons théories de gravité massive peuvent être vues comme provenant d'une tel modèle de bigravité où la dynamique de l'une des métriques est gelée pour devenir la métrique de fond.

Les équations du mouvement, dérivées de l'action (2.39), prennent la forme

$$M_P^2 G_{\mu\nu} = \left(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(g)} \right), \quad (2.44)$$

où $G_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein associé à la métrique g , $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion de la matière, défini au travers de

$$T_{\mu\nu}(x) \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}(x)} S_{matière}[g], \quad (2.45)$$

et $T_{\mu\nu}^{(g)}$ est le tenseur énergie-impulsion effectif provenant de la variation par rapport à la métrique g du terme d'interaction S_{int} :

$$T_{\mu\nu}^{(g)}(x) \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}(x)} S_{int}(f, g). \quad (2.46)$$

Il est à noter que l'action de la matière doit être invariante sous tout difféomorphisme commun aux deux métriques f et g ; comme elle ne dépend que de g , cela veut dire que l'action pour la matière est invariante sous tout changement de coordonnées. On peut alors montrer que cela implique la conservation du tenseur énergie-impulsion associé, c'est-à-dire que l'on a

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (2.47)$$

Le tenseur d'Einstein étant lui aussi conservé en vertu des identités de Bianchi, il découle des équations du mouvement (2.44) que

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(g)} = 0. \quad (2.48)$$

Ces quatre équations (2.48) sont des équations de contraintes, qui rendent autant de degrés de liberté non dynamiques. Cependant, nous avons vu dans le cas linéaire qu’une cinquième contrainte réduisait le nombre de degrés de liberté à 5, et il est naturel de se demander si cela est toujours le cas dans la théorie non-linéaire. L’analyse des équations du mouvement étant beaucoup plus compliquée dans le cas non-linéaire, il est utile, afin d’étudier cette question, de se tourner vers le formalisme hamiltonien.

2.3.2 Analyse hamiltonienne

Le formalisme hamiltonien de la gravité, massive ou non, se base sur la description dite “ADM” développée dans les années 60 par Arnowitt, Deser et Misner (voir par exemple [25] pour une revue du formalisme ADM). Une rapide présentation du formalisme ADM est donnée dans l’Annexe B, et nous y renvoyons le lecteur pour plus de détails et de références ; dans cette section, nous nous contenterons de rappeler quelques définitions qui nous permettront de mieux comprendre la dynamique des différentes composantes du graviton.

Variables ADM

La première étape consiste à identifier les variables adaptées au formalisme hamiltonien. Ce dernier séparant très nettement la coordonnée temporelle des coordonnées d’espace, il est nécessaire de procéder à une décomposition dite $3 + 1$ de toutes les quantités quadridimensionnelle. Nous allons nous intéresser ici à la dynamique de la métrique, et nous aurons donc besoin des variables ADM

$$N \equiv \left(\sqrt{-^{(4)}g^{00}} \right)^{-1}, \quad (2.49)$$

$$N_i \equiv {}^{(4)}g_{0i}, \quad (2.50)$$

$${}^{(3)}g_{ij} \equiv {}^{(4)}g_{ij}. \quad (2.51)$$

La fonction N , appelée *lapse* en anglais, et le vecteur N_i , appelée *shift*, traduisent la façon dont les trois coordonnées d’espace x^i évoluent d’une surface de temps constant t à une autre de temps $t + dt$. La métrique tri-dimensionnelle ${}^{(3)}g_{ij}$ correspond quant elle à la métrique induite par $g_{\mu\nu}$ sur la 3-surface de temps constant t .

Décomposition $3+1$

Maintenant que nous connaissons les variables à utiliser, il va s’agir d’écrire l’action (2.39) elle-même en fonction de ces variables. Nous avons vu dans la Section 2.3.1 qu’une infinité de complétions du terme de masse de PF peuvent être choisies. Nous nous concentrerons ici pour des raisons de simplicité sur le terme utilisé par Boulware et Deser [49], mais on peut montrer [83] que les résultats que nous allons présenter restent vrais pour toute théorie qui prend la forme de PF à l’ordre quadratique. Enfin, nous n’inclurons pas la matière dans notre analyse hamiltonienne, car c’est avant tout la dynamique de la métrique qui nous intéresse. Notre point de départ sera donc l’action

$$\bar{S} = \int d^4x \sqrt{-g} R - \frac{m^2}{4} \int d^4x h_{\mu\nu} h_{\sigma\tau} (\eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\tau} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\sigma\tau}), \quad (2.52)$$

où η est la métrique de Minkowski. Il est important de noter que nous avons écrit l'action ci-dessus dans un système d'unités tel que $M_P = 1$. Cette redéfinition ne change bien entendu rien au raisonnement que nous allons présenter ; il s'agit uniquement de suivre les notations de [104], et de travailler avec les expressions des grandeurs hamiltoniennes les plus simples possibles. Cependant, afin d'éviter toute confusion, nous noterons avec une barre supérieure \bar{S} toutes les actions dans le système d'unités tel que $M_P = 1$. La décomposition 3+1 de l'action (2.52) permet d'exprimer cette dernière en fonction des variables ADM et de leurs impulsions conjuguées¹⁰

$$\bar{S} = \int d^4x \left\{ \pi^{ij} \dot{g}_{ij} - NR^0 - N_i R^i - \frac{m^2}{4} \left(h_{ij} h_{ij} - h_{ii} h_{jj} - 2N_i N_i + 2h_{ii} \left(1 - N^2 + N_k g^{kl} N_l \right) \right) \right\}, \quad (2.53)$$

où les π^{ij} sont les impulsions conjuguées à la 3-métrique¹¹ g_{ij} , et $R^0(g_{kl}, \pi^{mn})$ et $R^i(g_{kl}, \pi^{mn})$ sont les contraintes de la RG, générées par les champs N et N_i ; leur expressions sont données dans l'Annexe B, Eq. (B.103) et Eq. (B.104). Notons la présence de termes cubiques dans l'action (2.53) alors que l'action de départ (2.52) est quadratique. Cela est dû au fait que le terme h_{00} est relié non linéairement aux variables ADM, au travers de $h_{00} = -(1 - N^2 + N_k g^{kl} N_l)$, comme on peut le voir à l'équation (B.95).

Analyse à l'ordre quadratique dans l'action

Dans un premier temps, nous voudrions utiliser l'action (2.53) pour retrouver le fait qu'à l'ordre le plus bas, *i.e.* quadratique dans l'action, seuls 5 degrés de liberté se propagent. Pour ce faire, introduisons la variable

$$n \equiv N - 1 = -\frac{1}{2} h_{00} \quad (2.54)$$

et supposons que les champs n , N_i et h_{ij} sont très petits devant 1 ; on obtient alors à partir de l'expression (2.53) l'action à l'ordre 2

$$\begin{aligned} \bar{S}^{(quad)} = \int d^4x \left\{ \pi^{ij} \dot{g}_{ij} - R_{(quad)}^0 - n R_{(lin)}^0 - N_i R_{(lin)}^i \right. \\ \left. + \frac{m^2}{4} \left((h_{ii})^2 - h_{ij} h_{ij} + 2N_i N_i + 4hn \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.55)$$

où $R_{(lin)}^0$ et $R_{(lin)}^i$ sont respectivement les parties linéaires de R^0 et R^i , et $R_{(quad)}^0$ la partie quadratique de R^0 . On remarque tout d'abord que les impulsions conjuguées à n et N_i sont nulles. Dans le langage hamiltonien, on dit que le système possède les contraintes primaires

$$\Phi_0 \equiv \pi_n = 0 \quad , \quad \Phi_i \equiv \pi_{N_i} = 0. \quad (2.56)$$

¹⁰Nous renvoyons de nouveau le lecteur à l'Annexe B, et plus précisément aux Sections B.5 et B.6, pour plus de détails sur la décomposition 3+1 de l'action d'Einstein-Hilbert et du terme de masse de BD.

¹¹À partir de maintenant, et ce jusqu'à la fin de cette section consacrée au formalisme hamiltonien, la 3-métrique $^{(3)}g_{ij}$ sera simplement notée g_{ij} , et sa métrique inverse g^{ij} .

Cela signifie que les champs n et N_i ne sont pas des champs dynamiques. Si l'on varie l'action (2.55) en fonction de n et N_i , on obtient les contraintes secondaires

$$\Phi_4 \equiv R_{(lin)}^0 - m^2 h_{ii} = 0, \quad (2.57)$$

$$\Phi_{4+i} \equiv R_{(lin)}^i - m^2 N_i = 0. \quad (2.58)$$

Le point déterminant, relevé par Boulware et Deser dans [49], est que le champ n , contrairement à N_i dont la valeur est fixée par l'Eq. (2.58), n'est pas déterminé par la contrainte (2.57). On voit en effet que n apparaît dans l'action (2.55) comme un multiplicateur de Lagrange, qui impose une nouvelle contrainte sur les autres champs. En calculant $R_{(lin)}^0$, on trouve que cette contrainte s'écrit

$$\Phi_4 = \partial_i \partial_i h - \partial_i \partial_j h_{ij} - m^2 h_{ii}. \quad (2.59)$$

On peut continuer le calcul de la chaîne des contraintes (*cf.* Section B.6.2) ; on obtient alors 10 contraintes hamiltoniennes, chacune d'elle déterminant un degré de liberté hamiltonien. Comme deux degrés de libertés hamiltoniens correspondent à un degré de liberté lagrangien, ces 10 contraintes fixent 5 degrés de liberté lagrangiens : le graviton massif libre ne possède donc que 5 degrés de liberté. On retrouve là le résultat que nous avons obtenu à la Section 2.2.3 au travers des équations du mouvement. On peut maintenant se demander ce qu'il en est au-delà de l'ordre quadratique dans l'action. Pour le savoir, tournons-nous vers le cas non-linéaire.

Analyse hamiltonienne de la théorie non-linéaire

Dans le cas non-linéaire, le statut du champ n (ou d'une façon équivalente de N) change par rapport au cas du graviton libre. En effet, n perd son statut de multiplicateur de Lagrange, du fait de la présence du terme cubique $h_{ii}N^2 = h_{ii}(1+n)^2$ dans le terme de masse de l'action (2.53). Plus précisément, alors que les contraintes primaires

$$\Phi_0 \equiv \pi_n = 0 \quad , \quad \Phi_i \equiv \pi_{N_i} = 0, \quad (2.60)$$

sont les mêmes que précédemment, les contraintes secondaires prennent la forme de

$$\Phi_4 \equiv R^0 - m^2 N h = 0, \quad (2.61)$$

$$\Phi_{4+i} \equiv R^i - m^2 (\eta^{ij} - h_{kk} g^{ij}) N_j = 0. \quad (2.62)$$

On voit que les contraintes Φ_4 et Φ_{4+i} permettent d'exprimer à la fois N_i et N en fonction des autres champs ; il n'y donc pas de contraintes supplémentaires sur les champs g_{ij} et π^{ij} , et six degrés de liberté se propagent !

La prise en compte des non-linéarités dans le terme de masse entraîne donc la "résurrection" du sixième degré de liberté, que la forme du terme de masse de PF empêchait de se propager. Dans le cas des termes de masse autres que PF, nous avons montré à la Section 2.2.2 que le sixième degré de liberté (qui existait dès l'ordre quadratique) était un fantôme. De la même façon, dans le cas de PF, le sixième degré de liberté qui apparaît à l'ordre non-linéaire est un fantôme, comme on peut le voir en calculant l'hamiltonien qui se révèle non borné inférieurement.

Un hamiltonien non borné inférieurement

Nous pouvons utiliser les contraintes (2.61) et (2.62) pour exprimer N et N_i en fonction des autres champs :

$$N = \frac{R^0}{m^2 h}, \quad (2.63)$$

$$N_i = \frac{1}{m^2} (\eta^{ij} - h_{kk} g^{ij})^{-1} R^j. \quad (2.64)$$

$$(2.65)$$

Cela nous permet d'écrire l'expression de l'hamiltonien dans lequel on a résolu les contraintes¹²

$$H = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2m^2} \frac{(R^0)^2}{h} + \frac{1}{2m^2} R^i (\eta^{ij} - h_{kk} g^{ij})^{-1} R^j + \frac{m^2}{4} (h_{ij} h_{ij} - h_{ii} h_{jj} + 2h_{ii}) \right\}. \quad (2.66)$$

Cet hamiltonien n'est pas borné inférieurement ; en particulier, quand $h \rightarrow 0^-$ alors que R^0 est gardé fini, on voit que le premier terme peut contribuer négativement d'une façon arbitrairement grande, signalant par là-même la présence d'un fantôme dans le spectre. On pourrait imaginer modifier la complétion non-linéaire du terme de masse de PF, afin d'éviter l'apparition de ce degré de liberté non-physique ; on peut malheureusement montrer [49, 77, 101] que la présence de ce fantôme est inévitable, quelque soit le terme de masse considéré¹³.

L'existence de ce fantôme dans le spectre de la théorie non-linéaire, est un obstacle majeur pour la gravité massive¹⁴. Dans la suite de cette thèse, nous garderons bien entendu cette limitation importante à l'esprit : la gravité massive ne sera pas nécessairement vue comme un modèle réaliste de l'interaction gravitationnelle, mais plutôt considérée comme un terrain de jeux et d'expérimentations théoriques nous permettant de mieux comprendre certains mécanismes à l'œuvre dans les théories de gravité modifiée. L'un des mécanismes que la gravité massive peut permettre de mieux appréhender est celui que Vainshtein a proposé en 1970 [269] selon lequel les non-linéarités de la gravité massive permettraient de résoudre les difficultés liées à la discontinuité de vDVZ, et garantiraient de retrouver

¹²Il est important de noter qu'il n'est pas toujours possible d'utiliser les contraintes hamiltoniennes pour éliminer certains degrés de liberté directement dans l'hamiltonien. Dans l'Annexe B, nous donnons dans l'équation (B.21) une condition suffisante que doivent respecter les contraintes afin de pouvoir être résolues directement dans l'hamiltonien. Il est facile de voir que les contraintes Φ_0, \dots, Φ_7 respectent ces conditions, et peuvent donc être utilisées pour éliminer les champs π_N, π_{N_i}, N et N_i .

¹³Une possibilité pour éviter cette difficulté consiste à briser l'invariance de Lorentz [275]. Nous travaillons, C. Deffayet, G. Gabadadze et moi-même sur un tel modèle, dans lequel l'invariance de Lorentz n'est brisée qu'à l'ordre cubique dans l'action, ce qui pourrait permettre de satisfaire plus facilement aux contraintes expérimentales sur la violation de l'invariance de Lorentz.

¹⁴Il faut cependant noter que le calcul de l'hamiltonien (2.66) est fait en toute généralité (c'est à dire que les h_{ij} et les π^{ij} sont quelconques), et non sur la couche de masse, c'est-à-dire en utilisant des solutions des équations du mouvement obtenues en incluant des sources de matière ; il se pourrait que les configurations d'énergies négatives ne puissent pas être créées par des sources réalistes, auquel cas la théorie resterait valable, en dépit de l'apparente pathologie de l'hamiltonien. Ainsi, Deffayet et Rombouts ont montré dans l'article [101] qu'au voisinage d'une source, le mode scalaire "sain" du graviton massif et le fantôme s'annulaient l'un l'autre, de telle sorte que la RG était retrouvée. Dans un esprit similaire, on pourrait imaginer que lorsque l'hamiltonien est calculé à partir de solutions physiques, la contribution négative du fantôme soit compensée systématiquement par le mode scalaire, assurant ainsi une énergie toujours bornée inférieurement sur la couche de masse.

la RG au voisinage des corps massifs. C'est ce mécanisme, fondamentalement non-linéaire, que nous souhaitons introduire à présent.

2.3.3 Le mécanisme de Vainshtein

Dans son article [269], A. Vainshtein avance l'hypothèse selon laquelle les non-linéarités de la gravité massive permettraient l'existence d'une solution à symétrie sphérique qui soit telle qu'à proximité d'un corps massif, la gravité soit très proche de la RG, tout en différant fortement de la RG à grandes distances. Cette hypothèse se base sur deux développements en séries, l'un à grandes distances, qui montre que les non-linéarités doivent être prises en compte bien au-delà du rayon de Schwarzschild, et l'autre à petites distances, qui montre que l'on peut trouver une solution proche de la RG au voisinage de la source.

Après avoir choisi un ansatz pour les deux métriques g et f , nous présenterons brièvement ces deux développements en séries, avant d'évoquer la question de la continuité de la solution entre les régimes à courtes et grandes distances. Notons que nous reviendrons en détails sur ces questions à la Section 3.3, ainsi qu'aux Chapitres 4 et 5.

Choix de la forme des métriques

Considérons une source à symétrie sphérique de masse M située en $R = 0$, et cherchons à décrire le champ gravitationnel créé. Nous devons choisir un ansatz pour les métriques g et f . La métrique physique g est choisie de la forme

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -e^{\nu(R)}dt^2 + e^{\lambda(R)}dR^2 + R^2d\Omega^2, \quad (2.67)$$

afin de faciliter la comparaison avec la solution de Schwarzschild. Cette dernière correspond à $\nu = \nu_{GR} \equiv \ln(1 - R_S/R)$ et $\lambda = \lambda_{GR} \equiv -\nu_{GR}$, où $R_S \equiv 2G_N M$ est le rayon de Schwarzschild de la source. Pour pouvoir imposer une forme aussi simple pour la métrique g tout en parvenant à résoudre les équations du mouvement, il est nécessaire que la métrique de fond f , supposée plate, contienne une fonction inconnue, que nous appellerons μ ; f est alors de la forme¹⁵

$$f_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + \left(1 - \frac{R\mu'(R)}{2}\right)^2 e^{-\mu(R)}dR^2 + e^{-\mu(R)}R^2d\Omega^2. \quad (2.68)$$

Développement en séries à grandes distances

À grandes distances, on peut supposer que les métriques tendent toutes deux vers la métrique plate en coordonnées sphériques, c'est à dire que les champs λ , ν et μ tendent vers 0. Il est alors naturel de faire un développement perturbatif en un petit paramètre qui encode le fait que les champs soient faibles; on peut ainsi choisir un paramètre proportionnel à la constante de Newton G . On développe donc les champs en puissances de G , sous

¹⁵Nous passons volontairement rapidement sur un grand nombre de détails et d'explications quant au choix de la forme des métriques. Nous invitons le lecteur à se tourner vers les références [28, 30, 85, 96, 269] ainsi qu'à la Section 3.1.1 de ce mémoire pour plus de précisions.

la forme

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0 + \lambda_1 + \dots \\ \nu &= \nu_0 + \nu_1 + \dots \\ \mu &= \mu_0 + \mu_1 + \dots\end{aligned}\tag{2.69}$$

où λ_i, ν_i, μ_i sont supposés être proportionnels à G^{i+1} , et tels que $\lambda_{i+1} \ll \lambda_i$, $\nu_{i+1} \ll \nu_i$ et $\mu_{i+1} \ll \mu_i$.

La première étape consiste à linéariser les équations du mouvement (2.44), et de résoudre le système ainsi obtenu, afin de trouver λ_0 , ν_0 et μ_0 . Le détail de ce calcul est donné dans [30, 85] et sera repris à la Section 3.2 ; ici, nous nous contenterons donc de donner directement la solution

$$\begin{aligned}\nu_0 &= -\frac{4CR_S}{3R} e^{-mR}, \\ \lambda_0 &= \frac{2CR_S}{3R} (1 + mR) e^{-mR}, \\ \mu_0 &= \frac{2CR_S}{3(mR)^2 R} (1 + mR + (mR)^2) e^{-mR},\end{aligned}\tag{2.70}$$

où C est une constante d'intégration que nous supposerons de l'ordre de l'unité. Il est intéressant de noter que dans ce régime $R \ll m^{-1}$, on a $\nu_L \sim -2\lambda_L$, et ce indépendamment de la masse du graviton : on retrouve là la discontinuité de vDVZ dans le contexte des solutions à symétrie sphérique.

On calcule ensuite la première correction au comportement linéaire, c'est-à-dire les fonctions ν_1 , λ_1 et μ_1 . On trouve [85, 96, 269] que dans le régime $R \ll m$,

$$\lambda_1 \sim \nu_1 \sim \mu_0^2 \sim \frac{R_S}{R} \times \frac{1}{(mR)^4} \frac{R_S}{R},\tag{2.71}$$

et

$$\mu_1 \sim \frac{R_S}{(mR)^2 R} \times \frac{1}{(mR)^4} \frac{R_S}{R}.\tag{2.72}$$

L'observation cruciale faite par Vainshtein est que les correction dues à ν_1 , λ_1 et μ_1 deviennent du même ordre de grandeur que les termes dominants à une échelle qui n'est pas l'échelle non-linéaire habituelle de la RG, à savoir R_S , mais une nouvelle échelle, appelée *rayon de Vainshtein* et qui a pour expression

$$R_V \equiv (R_S m^{-4})^{1/5}.\tag{2.73}$$

Cette échelle est beaucoup plus grande que R_S . Par exemple, si l'on suppose que la longueur de Compton du graviton m^{-1} est de l'ordre du rayon de Hubble H_0^{-1} , on trouve que pour le Soleil, $R_V \sim 10^{23}$ cm. Ce rayon est beaucoup plus grand que la taille du système solaire : la gravité massive linéarisée n'est donc pas utilisable pour l'étude le système solaire, et la théorie ne peut donc être exclue sur la base d'observations au sein du système solaire. Puisque le développement (2.69) n'est plus valable pour des distances $R < R_V$, il nous faut essayer de trouver un autre développement de la solution, adapté au voisinage de la source.

Développement en séries en puissances de m^2

Le développement en série à petites distances que Vainshtein a proposé dans [269] est un développement en puissances de m^2 . La motivation d'un tel développement est simple : puisque l'on veut retrouver la RG à petites distances, partons de la solution de la RG, c'est-à-dire $m^2 = 0$, et ajoutons des corrections proportionnelles à m^{2n} , de telle sorte que la solution des équations du mouvement (2.44) ainsi obtenue tende continûment vers la RG lorsque $m^2 \rightarrow 0$. Plus quantitativement, on développe les fonctions λ, ν, μ selon

$$f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} m^{2n} f_n(R) , \quad (2.74)$$

où les f_n ne dépendent pas de m . Cette solution est clairement différente de la solution (2.69), car elle prend en compte les non-linéarités de la théorie. Par définition, l'ordre zéro des fonctions λ and ν est donnée par la solution de Schwarzschild

$$\lambda_0 = -\nu_0 = -\ln \left(1 - \frac{R_S}{R} \right) = \frac{R_S}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{R_S}{R} \right)^2 + \dots \quad (2.75)$$

On peut ensuite utiliser l'équation de Bianchi (2.48) pour trouver

$$\mu_0 \sim M_0 \sqrt{\frac{R_S}{R}} . \quad (2.76)$$

La première correction due au terme de masse prend la forme

$$\nu_1 = (mR)^2 \left[N_1 \sqrt{\frac{R_S}{R}} + \mathcal{O} \left(\frac{R_S}{R} \right) \right] , \quad (2.77)$$

$$\lambda_1 = (mR)^2 \left[L_1 \sqrt{\frac{R_S}{R}} + \mathcal{O} \left(\frac{R_S}{R} \right) \right] , \quad (2.78)$$

$$\mu_1 = (mR)^2 \left[M_1 + \mathcal{O} \left(\sqrt{\frac{R_S}{R}} \right) \right] , \quad (2.79)$$

où les coefficients N_1, L_1 et M_1 dépendent du terme de masse considéré. En comparant l'ordre 0 et l'ordre 1, on voit que le développement (2.74) est valide jusqu'à $R \ll R_V$. L'hypothèse selon laquelle il est possible de trouver, en tenant compte des non-linéarités de la théorie, une solution qui tende continûment vers la RG, est ce que nous appellerons dans la suite *le mécanisme de Vainshtein*.

Existe-t-il une solution globale ?

Nous venons de voir qu'il est possible de trouver des solutions sous forme de séries à la fois loin de la source ($R > R_V$), et au voisinage de la source ($R < R_V$), comme l'illustre la figure 2.1. Les deux régimes cessent tout deux d'être valides lorsque $R \sim R_V$. Il est alors naturel de se demander s'il est possible de trouver une solution globale, qui interpolerait entre ces deux solutions. L'existence d'une telle solution globale a été étudié pour la première fois numériquement par Damour, Kogan et Papazoglou dans [85]. La

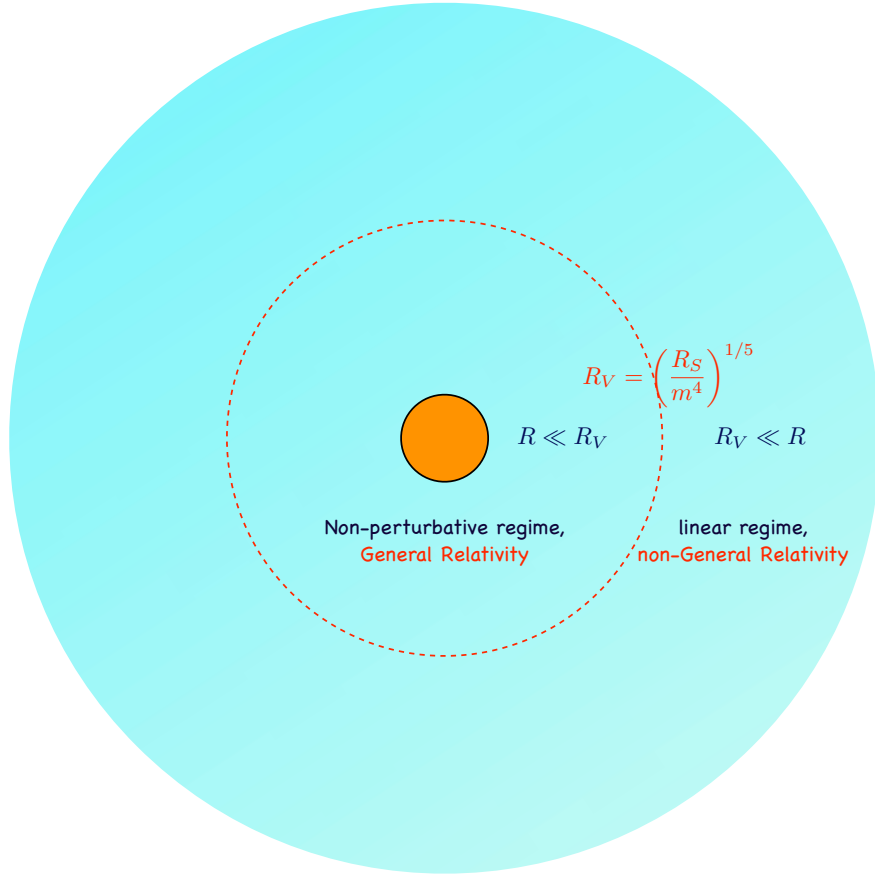


FIG. 2.1 – Schéma illustrant les différents régimes en fonction de la distance à la source. À petites distances ($R < R_V$), il est possible de trouver une solution sous forme de série qui tend continûment vers la RG quand $m^2 \rightarrow 0$. À grandes distances ($R > R_V$), la solution de la théorie linéarisée est valide et diffère fortement de la RG.

conclusion de leur article est négative : selon [85], il ne semble pas exister de solution globale satisfaisante, qui tende vers l'espace plat à l'infini. Cependant, au cours de ma thèse, nous avons, E. Babichev, C. Deffayet, et moi-même (RZ), ré-examiné cette question, et sommes arrivés à des conclusions opposées. Nous avons en effet pu montrer [28, 30], que de telles solutions globales pouvaient exister, pour certains termes de masse tout au moins. Ces résultats seront présentés en détails aux Chapitres 4 et 5, et constituent un des principaux résultats de mon travail de thèse.

La découverte de ces solutions, qui n'avaient pas été identifiées dans [85], a nécessité de comprendre en détail le mécanisme de Vainshtein, c'est-à-dire d'identifier quelles sont les non-linéarités à prendre en compte, et comment ces dernières permettent de retrouver la RG à petites distances. Pour cela, il est très utile de simplifier la théorie, en prenant une limite particulière appelée *limite de découplage* qui permet de se concentrer sur les non-linéarités les plus importantes pour le mécanisme de Vainshtein. C'est cette limite de découplage qu'il nous faut donc introduire maintenant.

2.4 Limite de découplage

L'idée de la limite de découplage¹⁶ (LD) a été proposée par Arkani-Hamed, Georgi et Schwartz [21]. La première étape, avant de prendre la limite proprement dite, consiste à séparer les différents degrés de liberté contenus dans le graviton massif à l'aide du mécanisme de Stückelberg. Pour ce faire, les symétries de jauge brisées par le terme de masse de la gravité massive sont réintroduites, à l'aide de champs auxiliaires qui correspondent aux bosons de Goldstone des symétries brisées. Une fois ces champs introduits, la limite de découplage consiste en la limite

$$\begin{aligned} M_P &\rightarrow \infty, \\ m &\rightarrow 0, \\ \Lambda &\equiv (M_P m^4)^{1/5} \sim \text{constante}, \\ T_{\mu\nu}/M_P &\sim \text{constante}. \end{aligned} \tag{2.80}$$

Nous verrons que cette limite permet de se concentrer sur le secteur scalaire du graviton : les termes de couplages entre le scalaire et les autres degrés de liberté disparaissent, et seuls restent certains termes d'interaction du scalaire avec lui-même. On peut alors constater que c'est ce mode scalaire du graviton qui est responsable des non-linéarités qui deviennent importantes à $R \sim R_V$. La LD permet donc de ne garder que les non-linéarités importantes pour le mécanisme de Vainshtein.

2.4.1 Introduction au mécanisme de Stückelberg : le champ de Proca

En guise d'introduction, il est intéressant de présenter le principe du mécanisme de Stückelberg sur un exemple plus simple que celui du graviton massif : le vecteur massif¹⁷, dit "de Proca". Le point de départ est l'action

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \right\}. \tag{2.81}$$

Le terme de masse brise l'invariance de jauge habituelle $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, et le champ A_μ contient trois degrés de liberté : un mode vectoriel d'hélicité ± 1 et un mode scalaire longitudinal. En théorie quantique des champs, il est bien connu qu'une telle théorie n'est pas renormalisable, et qu'elle ne peut être valable que jusqu'à l'échelle d'énergie $E \sim m$. Au-delà, une complétion ultra-violette est nécessaire de façon à rendre la théorie renormalisable. Supposons que la théorie renormalisable associée soit celle d'un champ vectoriel sans masse couplé à un champ scalaire complexe (champ de Higgs), qui contient deux degrés de liberté. L'action du champ de Higgs possède alors une symétrie $U(1)$; à basse énergie (c'est-à-dire pour $E < m$), cette symétrie est brisée spontanément, et la dynamique d'un des degrés de liberté du Higgs, qui est massif, est gelée. L'autre degré de liberté du Higgs, qui est sans masse, peut être incorporé dans le champ vectoriel, qui devient alors massif. Si l'on néglige le rôle du mode massif du Higgs, on obtient précisément l'action (2.81). Le

¹⁶Le terme anglais est "decoupling limit".

¹⁷Le champ vectoriel massif est également étudié d'un point de vue hamiltonien dans les Sections B.3 et B.4. Nous invitons donc le lecteur à s'y référer pour plus de détails, et pour une analyse hamiltonienne des degrés de liberté du champ de Proca.

mode scalaire sans masse, qui est “mangé” par le vecteur, est appelé champ Goldstone et est associé à la symétrie brisée spontanément.

L’idée du mécanisme de Stückelberg consiste à réintroduire “explicitement” ce boson de Goldstone, de façon à séparer dans A_μ le mode vectoriel du mode longitudinal. Pour ce faire, on procède dans l’action (2.81) au remplacement $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \phi$. L’action devient alors

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 (A_\mu - \partial_\mu \phi)(A^\mu - \partial^\mu \phi) \right\}, \quad (2.82)$$

qui est invariante sous la transformation de jauge

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad (2.83)$$

$$\phi \rightarrow \phi + \Lambda. \quad (2.84)$$

On peut bien sûr utiliser cette invariance de jauge pour fixer $\phi = 0$; c’est alors la jauge dite *unitaire*, qui permet de retrouver exactement l’action (2.81), montrant ainsi que les deux actions (2.81) et (2.82) sont équivalentes. Cependant, d’autres jauges sont possibles, et notamment une jauge que l’on pourrait qualifier de *transverse* ou encore *de Lorentz*, telle que $\partial_\mu A^\mu = 0$. L’action s’écrit alors

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} A^\mu (\square - m^2) A_\mu + \frac{1}{2} m^2 \phi \square \phi \right\}. \quad (2.85)$$

On voit que les termes cinétiques du degré scalaire ϕ et du vecteur A_μ sont maintenant indépendants, et on peut montrer¹⁸ que le champ A_μ ne contient plus que deux degrés de liberté dynamiques. Le mécanisme de Stückelberg nous a donc permis de séparer explicitement le mode scalaire longitudinal du vecteur massif (le boson de Goldstone) des modes transverses.

2.4.2 Le mécanisme de Stückelberg pour la gravité massive

Pour appliquer le mécanisme de Stückelberg à la gravité massive, il faut tout d’abord comprendre quelles sont les symétries qui sont brisées par le terme de masse et qu’il s’agira de rétablir à l’aide de bosons de Goldstone. On sait que toutes les symétries ne sont pas brisées : la théorie est toujours invariante sous la redéfinition *commune* des deux métriques $f_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu}$ par changement de coordonnées (2.38). Cela veut dire que si l’on veut transformer la métrique physique g par difféomorphisme, il faut également agir sur la métrique de fond f . Cette dernière n’a cependant rien à voir avec le monde physique, et on pourrait vouloir que les métriques f et g soient des objets qui se transforment indépendamment l’un de l’autre.

On pourra donc considérer que l’objet fondamental correspondant à la métrique $f_{\mu\nu}$ est en fait une métrique f_{AB} défini sur un espace \mathcal{M}_4 différent de l’espace physique m_4 . La métrique f_{AB} est alors par définition insensible aux changements de coordonnées x^μ sur m_4 et se transforme comme un tenseur d’ordre 2 lorsque l’on change les coordonnées X^A de \mathcal{M}_4 . Ceci dit, il faut bien que les espaces \mathcal{M}_4 et m_4 soient reliés : on suppose donc l’existence d’un isomorphisme $X^A(x_\mu)$ reliant les coordonnées sur \mathcal{M}_4 et m_4 . Il est alors

¹⁸Une telle démonstration est faite dans la Section B.4.

naturel de voir en $f_{\mu\nu}(x)$ la métrique induite sur m_4 par f_{AB} via l'isomorphisme $X^A(x)$, c'est-à-dire

$$f_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu X^A(x) \partial_\nu X^B(x) f_{AB}(X(x)). \quad (2.86)$$

Sous une transformation $x \rightarrow x'(x)$, les champs $\partial_\mu X^A(x)$ se transforment selon

$$\partial_\mu X^A(x) = \partial_\mu x'^\sigma \partial_\sigma X^A(x'),$$

de telle sorte que $f_{\mu\nu}$ se comporte comme un tenseur d'ordre 2 sur m_4 , alors que f_{AB} n'est pas affecté par ce changement de coordonnées sur m_4 . À l'inverse, on peut effectuer le changement de coordonnées $X^A \rightarrow X'^A$ sur \mathcal{M}_4 : f_{AB} se transforme alors comme un tenseur d'ordre 2 sur \mathcal{M}_4 tandis que $f_{\mu\nu}$ reste inchangée.

Les champs $X^A(x)$ sont donc les champs de Stückelberg de la gravité massive : ils permettent de rétablir l'invariance de la théorie par l'action de difféomorphismes indépendants sur chacune des métriques f et g . Notre point de départ pour l'étude de la gravité massive avec ces champs de Stückelberg sera donc l'action (2.39) où l'on remplace la métrique $f_{\mu\nu}$ par son expression (2.86) en fonction de f_{AB} . Nous supposons de plus que la métrique f_{AB} est la métrique de Minkowski $\text{diag}(-1, 1, 1, 1) \equiv \eta_{AB}$.

D'une façon similaire au champ de Proca, on peut utiliser la nouvelle liberté introduite par les champs $X^A(x)$ pour fixer la jauge. La jauge *unitaire*

$$X_0^A(x) \equiv \delta_\mu^A x^\mu, \quad (2.87)$$

permet de retrouver la théorie initiale (2.39). On peut cependant vouloir garder la trace de la liberté de jauge réintroduite par les champs de Stückelberg ; c'est pourquoi Arkani-Hamed *et al.* ont proposé dans [21] d'introduire les "pions" π^A

$$X^A(x) = X_0^A(x) + \pi^A(x), \quad (2.88)$$

qui mesure l'écart à la jauge unitaire. On aimerait de plus effectuer une décomposition scalaire-vecteur des pions π^A en utilisant le formalisme de Stückelberg que nous avons décrit pour le vecteur massif à la Section 2.4.1. Le problème est que le pion π^A n'est pas vraiment un vecteur (c'est à dire un tensor d'ordre 1) sur la variété \mathcal{M}_4 : la décomposition n'est donc pas évidente. Nous rediscutons ce point dans la Section 2.3 de l'article [30], où nous montrons qu'une décomposition pratique des pions est donnée par

$$\pi^A(x) = \delta_\mu^A (A^\mu(x) + \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi). \quad (2.89)$$

D'une façon pratique, l'introduction des pions revient à effectuer dans l'action (2.39) le remplacement

$$\begin{aligned} f_{\mu\nu} \rightarrow & f_{\mu\nu} + \partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu + 2\partial_\mu \partial_\nu \phi \\ & + \partial_\mu A_\sigma \partial_\nu A^\sigma + \partial_\mu \partial_\sigma \phi \partial_\nu \partial^\sigma \phi \\ & + \partial_\nu A^\sigma \partial_\mu \partial_\sigma \phi + \partial_\mu A^\sigma \partial_\nu \partial_\sigma \phi, \end{aligned} \quad (2.90)$$

ou d'une façon équivalente à remplacer le graviton $h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - f_{\mu\nu}$ par

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} \rightarrow & h_{\mu\nu} - \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - 2\partial_\mu \partial_\nu \phi \\ & - \partial_\mu A_\sigma \partial_\nu A^\sigma - \partial_\mu \partial_\sigma \phi \partial_\nu \partial^\sigma \phi \\ & - \partial_\nu A^\sigma \partial_\mu \partial_\sigma \phi - \partial_\mu A^\sigma \partial_\nu \partial_\sigma \phi. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Pour comprendre l'intérêt de la réintroduction explicite des bosons de Goldstone, utilisons le remplacement (2.91) au sein de l'action quadratique de la gravité massive (2.17). Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} S_2 = & \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \left\{ \left(\frac{1}{2} h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\sigma h_\mu^\sigma + \frac{1}{4} h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{4} h \square h \right) \right. \\ & + \frac{m^2}{4} [h^2 - h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 4(h \partial A - h_{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu) - 4(h \square \phi - h_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu \phi)] \left. \right\} \\ & + \frac{1}{2} \int d^4x T_{\mu\nu} h^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Nous observons que tandis que A^μ acquiert un terme cinétique standard, le terme cinétique de ϕ est entremêlé à celui de $h_{\mu\nu}$. Ceci est dû à la structure particulière du terme de masse de PF [21]. Afin de diagonaliser le terme cinétique, on peut effectuer la redéfinition [21]

$$h_{\mu\nu} = \hat{h}_{\mu\nu} - m^2 \eta_{\mu\nu} \phi, \quad (2.93)$$

qui permet d'obtenir l'action

$$\begin{aligned} S_2 = & \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \left\{ \left(\frac{1}{2} \hat{h}^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \hat{h} - \frac{1}{2} \hat{h}^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\sigma \hat{h}_\mu^\sigma + \frac{1}{4} \hat{h}^{\mu\nu} \square \hat{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \hat{h} \square \hat{h} \right) \right. \\ & + \frac{m^2}{4} \left(\hat{h}^2 - \hat{h}_{\mu\nu} \hat{h}^{\mu\nu} - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 4(\hat{h} \partial A - \hat{h}_{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu) \right. \\ & \left. \left. + 6m^2 [\phi(\square + 2m^2)\phi - \hat{h}\phi + 2\phi\partial A] \right) \right\} \\ & + \frac{1}{2} \int d^4x (T_{\mu\nu} \hat{h}^{\mu\nu} - m^2 T \phi). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Enfin, on peut fixer la jauge de façon à mettre à zéro les interaction quadratiques entre ϕ , A et $\hat{h}_{\mu\nu}$. Il suffit pour cela d'ajouter à l'action un terme de fixage de jauge *transverse*, qui prend la forme (*cf* [201] et la Section B.6.4 de ce mémoire)

$$\mathcal{L}_{GF} = -2 \left(\Theta^\mu \Theta_\mu + \frac{m^2}{4} \Theta^2 \right), \quad (2.95)$$

avec

$$\Theta_\mu = \frac{1}{2} \partial_\nu \hat{h}_\mu^\nu - \frac{1}{4} \partial_\mu \hat{h} - \frac{1}{2} m^2 A_\mu, \quad (2.96)$$

$$\Theta = \partial_\mu A^\mu - \frac{1}{2} \hat{h} + 3m^2 \phi. \quad (2.97)$$

L'action diagonalisée s'écrit finalement

$$\begin{aligned} S_2 = & \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} \hat{h}^{\mu\nu} (\square - m^2) (\hat{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \hat{h} \eta_{\mu\nu}) \right. \\ & \left. + \frac{m^2}{2} A_\mu (\square - m^2) A^\mu + \frac{3}{2} m^4 \phi (\square - m^2) \phi \right\}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Les différents modes du graviton massif sont maintenant bien identifiés¹⁹ : il s'agit du graviton $\hat{h}_{\mu\nu}$, qui contient deux degrés de liberté, du vecteur A_μ , qui est transverse et qui en contient également 2, et enfin, du mode scalaire ϕ . Le mécanisme de Stückelberg nous a donc bien permis de faire apparaître explicitement les différents modes du graviton massif. La limite de découplage va maintenant nous permettre de nous concentrer sur le mode scalaire.

2.4.3 La normalisation canonique et la limite de découplage

L'action diagonalisée (2.98) fait apparaître le fait que les champs ne sont pas canoniquement normalisés. Afin de pouvoir étudier la gravité massive en tant que théorie effective de la gravité, nous procédons donc aux redéfinitions

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{\mu\nu} &= M_P \hat{h}_{\mu\nu}, \\ \tilde{A}^\mu &= M_P m A^\mu, \\ \tilde{\phi} &= M_P m^2 \phi.\end{aligned}\tag{2.99}$$

On peut ensuite s'intéresser aux termes d'ordre supérieur à deux. Si l'on développe l'action en fonction de $\tilde{\phi}$, \tilde{A} et $\tilde{h}_{\mu\nu}$ à partir de (2.91), il apparaît que $\tilde{\phi}$ possède, sauf cas particulier, un terme d'interaction cubique de la forme

$$\frac{1}{\Lambda^5} (\partial^2 \tilde{\phi})^3, \tag{2.100}$$

où l'échelle d'énergie Λ est définie par

$$\Lambda = (m^4 M_P)^{1/5}. \tag{2.101}$$

Lorsque ce terme est présent dans l'action, on peut alors montrer [21] que ce terme est le terme d'interaction dominant à basse énergie ; c'est donc le terme le premier terme à étudier pour comprendre la transition entre le régime de champ faible et le régime non-linéaire. Remarquons que si l'on interprète la théorie ainsi mise en évidence en tant que théorie effective, l'échelle d'énergie Λ apparaît comme le *cutoff* de la théorie.

Afin de pouvoir se concentrer sur le secteur scalaire, et ne garder que ces non-linéarités cubiques en $\tilde{\phi}$, on peut prendre la *limite de découplage*

$$\begin{aligned}M_P &\rightarrow \infty, \\ m &\rightarrow 0, \\ \Lambda &\sim \text{constante}, \\ T_{\mu\nu}/M_P &\sim \text{constante}.\end{aligned}\tag{2.102}$$

Dans cette limite, l'action pour $\tilde{\phi}$ n'est plus couplée aux autres degrés de liberté, et prend la forme [21, 30]

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \left\{ \frac{3}{2} \tilde{\phi} \square \tilde{\phi} + \frac{1}{\Lambda^5} \left[\alpha (\square \tilde{\phi})^3 + \beta (\square \tilde{\phi} \tilde{\phi}_{,\mu\nu} \tilde{\phi}^{,\mu\nu}) \right] - \frac{1}{M_P} T \tilde{\phi} \right\}, \tag{2.103}$$

¹⁹L'analyse Hamiltonienne effectuée dans la Section B.6.4 permet de confirmer rigoureusement la décomposition intuitive que l'on peut déduire de l'action (2.98).

où α et β sont deux coefficient numériques qui peuvent être ajustés [30] en choisissant le terme de masse $S_{inf}[f, g]$. Par exemple, le potentiel de BD (2.42) correspond à $\alpha = -\beta = -1/2$, tandis que le potentiel AGS (2.43) correspond au cas $\alpha = -\beta = 1/2$. Les équations du mouvement pour $\tilde{\phi}$ qui dérivent de l'action (2.103) s'écrivent

$$3\Box\tilde{\phi} + \frac{1}{\Lambda^5} \left[3\alpha \Box \left(\Box\tilde{\phi} \right)^2 + \beta \Box \left(\tilde{\phi}_{,\mu\nu} \tilde{\phi}^{,\mu\nu} \right) + 2\beta \partial_\mu \partial_\nu \left(\Box\tilde{\phi} \tilde{\phi}^{,\mu\nu} \right) \right] = \frac{1}{M_P} T. \quad (2.104)$$

Les deux dernières équations (2.103) et (2.104) mettent en évidence l'avantage qu'il peut y avoir à étudier la gravité massive dans la LD : cela permet se concentrer sur le seul secteur scalaire et comprendre ainsi plus facilement l'origine de certaines propriétés de la théorie. En particulier, cette limite de découplage va nous être précieuse dans l'étude de du mécanisme de Vainshtein, comme nous allons le voir à présent.

2.4.4 Le mécanisme de Vainshtein dans la limite de découplage

Dans cette section, nous voudrions comprendre en termes simples comment fonctionne le mécanisme de Vainshtein. Nous allons donc raisonner en ordre de grandeur, sans tenir compte de la structure tensorielle des expressions considérées. Nous allons également exprimer nos résultats en fonction des champs $h_{\mu\nu}$ et ϕ , de façon à rendre plus aisée la comparaison avec les résultats de Vainshtein que nous avons présentés à la Sec. 2.3.3.

Commençons par l'équation du mode scalaire. On peut schématiser l'équation du mouvement de $\tilde{\phi}$ (2.104) par

$$\partial^2 \tilde{\phi} + \ll \frac{1}{\Lambda^5} \partial^2 \left(\partial^2 \tilde{\phi} \right)^2 \gg = \frac{T}{M_P}, \quad (2.105)$$

où nous avons simplifié la structure tensorielle et les coefficients multiplicatifs des termes entre guillemets. Pour le champ ϕ , l'équation équivalent prend la forme

$$m^2 \partial^2 \phi + \ll \partial^2 \left(\partial^2 \phi \right)^2 \gg = \frac{T}{M_P^2}. \quad (2.106)$$

Passons maintenant au graviton. Dans la limite de découplage, l'équation du mouvement pour $\tilde{h}_{\mu\nu}$ peut se schématiser en

$$\tilde{G}_{\mu\nu}^{(lin)} = \frac{T_{\mu\nu}}{M_P}, \quad (2.107)$$

où $\tilde{G}_{\mu\nu}^{(lin)}$ est le tenseur d'Einstein linéarisé exprimé en fonction de $\tilde{h}_{\mu\nu}$. Cependant, il ne faut pas oublier que nous avons procédé à la redéfinition (2.93). Il est donc nécessaire de faire la transformation inverse : afin de revenir aux champs initiaux, remplaçons $\tilde{h}_{\mu\nu} = M_P h_{\mu\nu} + M_P m^2 \phi \eta_{\mu\nu}$. Les équations d'Einstein prennent alors la forme schématique

$$G_{\mu\nu}^{(lin)} + m^2 \partial^2 \phi = \frac{T_{\mu\nu}}{M_P^2}. \quad (2.108)$$

Nous pouvons maintenant décrire ce qui se passe dans les différents cas. Dans le régime linéaire, on néglige le terme quadratique dans l'équation (2.106). Il n'y a plus de dérivée d'ordre supérieur : le fantôme ne se propage pas. De plus, on voit à partir de l'Eq. (2.106) que $m^2 \partial^2 \phi \sim T/M_P^2$; cela implique que les trois termes de l'Eq. (2.108) sont du même

ordre : le degré de liberté ϕ joue un rôle similaire au graviton. Il y a donc trois degrés de liberté qui sont responsables de l'interaction gravitationnelle au lieu des deux de la RG : on retrouve là la cause de la discontinuité de vDVZ.

Dans le régime non-linéaire, au contraire, on suppose que le terme quadratique domine dans l'équation (2.106), c'est-à-dire que

$$\ll \partial^2 (\partial^2 \phi)^2 \gg \sim \frac{T}{M_P^2} \gg m^2 \partial^2 \phi. \quad (2.109)$$

Si l'on utilise le fait que $\frac{T}{M_P^2} \gg m^2 \partial^2 \phi$ dans l'équation (2.108), on obtient

$$G_{\mu\nu}^{(lin)} = \frac{T_{\mu\nu}}{M_P^2}, \quad (2.110)$$

c'est à dire que l'on retrouve la RG !

On peut enfin se demander à quelle échelle la transition entre les deux régimes a lieu. Pour cela, il suffit de se rendre compte que dans le régime linéaire,

$$\phi \sim \frac{1}{m^2} h \sim \frac{R_S}{m^2 R}. \quad (2.111)$$

Cela nous permet de calculer le rapport entre le terme quadratique et linéaire de l'équation (2.106) :

$$\frac{\partial^2 (\partial^2 \phi)^2}{m^2 \partial^2 \phi} \sim \frac{R_S m^{-4}}{R^5}. \quad (2.112)$$

La transition a donc lieu lorsque $R^5 \sim R_S m^{-4}$, c'est-à-dire pour $R \sim R_V$. On retrouve ainsi le rayon de Vainshtein²⁰.

Cette analyse nous a donc permis de comprendre le principe du mécanisme de Vainshtein : en régime de champ faible, le mode scalaire se propage et modifie la gravité, alors qu'en champ fort, les auto-interactions du mode scalaire créent un phénomène d'écrantage, qui fait que le champ ϕ devient négligeable devant le graviton : la Relativité Générale est alors retrouvée. Le raisonnement que nous venons de suivre est bien entendu valable dans la limite de découplage. Il est donc légitime de se demander dans quelle mesure ce raisonnement peut être généralisé au cas où toutes les non-linéarités sont prises en compte. Nous aborderons cette question à la Section 2.5 ; avant cela, nous voudrions évoquer un autre aspect des théories de gravité massive que l'action (2.103) et les équations du mouvement (2.104) mettent en évidence : la présence d'un fantôme dans la théorie.

2.4.5 Du fantôme caché dans les dérivées d'ordre supérieur

Les équations du mouvement (2.104) contiennent des dérivées d'ordre supérieur (c'est-à-dire des termes $\partial^n \tilde{\phi}$ avec $n > 2$) et on peut montrer [77] qu'il n'est pas possible de choisir le terme de masse de façon à éviter ces termes. Or, il est bien connu que la présence

²⁰Notons à ce titre que le rayon de Vainshtein est précisément l'échelle de distance qui est laissée fixe par la limite de découplage (2.102).

de telles dérivées d'ordre supérieur dans les équations du mouvement signifie la présence d'un fantôme dans le spectre [55, 289]. On retrouve là [77, 101] le sixième degré de liberté fantomal, que nous avons mis en évidence au travers de l'analyse hamiltonienne de la Section 2.3.2.

Il est instructif de faire apparaître explicitement le fantôme, au moins sur un exemple concret. Nous reprenons donc ici l'analyse faite par Deffayet et Rombouts dans [101] pour le cas $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. On peut ainsi montrer que l'action

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \left\{ \frac{3}{2} \tilde{\phi} \square \tilde{\phi} - \partial_\mu \tilde{\psi} \partial^\mu \tilde{\phi} - \frac{2\epsilon \Lambda^{5/2}}{3\sqrt{3\alpha}} \tilde{\psi}^{3/2} - \frac{1}{M_P} T \tilde{\phi} \right\}, \quad \text{avec } \epsilon \equiv \text{sign} \square \tilde{\phi} \quad (2.113)$$

est équivalente à l'action (2.103) avec $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. Le changement de variables supplémentaire

$$\tilde{\phi} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} (\tilde{\phi}_c - \tilde{\psi}_c), \quad \tilde{\psi} \rightarrow \sqrt{6} \tilde{\psi}_c, \quad (2.114)$$

permet d'obtenir une forme diagonalisée et canonique du terme cinétique

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\phi}_c \square \tilde{\phi}_c - \frac{1}{2} \tilde{\psi}_c \square \tilde{\psi}_c - \frac{2\sqrt{2}\epsilon \Lambda^{5/2}}{\sqrt{\alpha}} \tilde{\psi}_c^{3/2} - \frac{1}{2M_P} \sqrt{\frac{2}{3}} T (\tilde{\phi}_c - \tilde{\psi}_c) \right\}. \quad (2.115)$$

Il est alors évident que le champ $\tilde{\psi}_c$ est un fantôme : son terme cinétique étant d'un signe opposé à celui de l'autre degré de liberté $\tilde{\phi}_c$.

Afin de déterminer dans quelle mesure ce fantôme peut être amené à jouer un rôle, il faut comparer sa masse au *cutoff* de la théorie vue comme une théorie effective [77]. Pour cela, on peut étudier les perturbations du champ $\tilde{\phi}$ autour de la solution classique linéaire (2.111). Appelons $\tilde{\Phi}(R)$ cette solution, et définissons la perturbation $\varphi \equiv \tilde{\phi} - \tilde{\Phi}$. Le lagrangien pour le champ φ prend la forme schématique

$$\mathcal{L} = -(\partial\varphi)^2 + \frac{(\partial^2 \tilde{\Phi})}{\Lambda^5} (\partial^2 \varphi)^2, \quad (2.116)$$

qui peut être réécrit, en introduisant le champ auxiliaire χ , sous la forme

$$\mathcal{L} = -(\partial\varphi)^2 - 2(\partial^2 \tilde{\Phi}) \partial\chi \partial\varphi - (\partial^2 \tilde{\Phi}) \Lambda^5 \chi^2. \quad (2.117)$$

La redéfinition $\varphi_c = \varphi - (\partial^2 \tilde{\Phi}) \chi$ et $\psi_c = (\partial^2 \tilde{\Phi}) \chi$ permet de diagonaliser le terme cinétique, menant à

$$\mathcal{L} = -(\partial\varphi_c)^2 + (\partial\psi_c)^2 - \frac{\Lambda^5}{(\partial^2 \tilde{\Phi})} \psi_c^2. \quad (2.118)$$

Nous voyons donc que le champ ψ_c est un fantôme, de masse

$$m_{\text{fant}}^2 = \frac{\Lambda^5}{(\partial^2 \tilde{\Phi})}. \quad (2.119)$$

En utilisant l'expression de la solution classique $\tilde{\Phi} \sim M/(M_P R)$, on montre [77] que la masse de ce fantôme devient de l'ordre du *cutoff* à l'échelle

$$R_{\text{fant}} \sim \left(\frac{M}{M_P} \right)^{1/3} \frac{1}{\Lambda} \gg R_V. \quad (2.120)$$

À des distances plus petites que R_{fant} , le fantôme est donc dans le spectre de la théorie. Cependant, la présence de ce fantôme ne devient vraiment problématique que lorsque l'énergie de la solution classique et la masse m_{fant} deviennent du même ordre, car cela signifie que le fantôme peut être excité. Le rayon auquel $m_{\text{fant}} \sim \tilde{\Phi}$ peut être aisément calculé, et se trouve être le rayon de Vainshtein. Cela signifie que la gravité massive, telle que définie à l'équation (2.39), cesse d'être valide à ce rayon, précisément lorsque le mécanisme de Vainshtein entre en jeu.

Comme nous l'avions dit à la Section 2.3.2, la présence de ce fantôme rend la théorie classique difficilement viable d'un point de vue physique, et nécessiterait une complétion dans l'UV. Nous ne considérerons donc pas les modèles de gravité massive comme des modèles réalistes de gravité, mais bien comme un cadre intéressant pour étudier en détail la validité du mécanisme de Vainshtein. Les enseignements tirés de cette étude pourront ensuite être utilisés pour des modèles dans lesquels le mécanisme de Vainshtein existe, sans que cela s'accompagne de la présence de fantôme.

2.5 De la limite de découplage au cas général

Nous avons vu que la limite de découplage était définie comme une limite de la théorie, qui permet de simplifier la structure des termes non-linéaires. Supposons que l'on puisse obtenir une solution dans cette limite : que peut-on en déduire quant à l'existence d'une possible solution du système complet ?

2.5.1 Intervalle de validité de la limite de découplage

Il est assez naturel de supposer qu'une solution de la LD reste une bonne approximation d'une solution du système non-linéaire sur tout intervalle sur lequel les non-linéarités négligées dans la LD sont effectivement négligeables. Cette idée, qui peut sembler évidente, est en fait très fructueuse. Elle donne en effet une méthode pour trouver une solution de la gravité massive : si l'on possède une solution de la LD, il peut suffire de la déformer un peu pour obtenir une solution du système complet.

Nous utiliserons cette propriété dans le cadre des solutions à symétrie sphérique : il est donc intéressant pour nous d'évoquer ce cas dès à présent ; une discussion plus approfondie de ces questions est proposée à la Section 5.1. Considérons tout d'abord la situation pour $R \gg R_V$. Toute solution de la LD est alors une solution de la LD linéarisée, et les champs ont la forme asymptotique (2.111). On peut alors voir que les termes d'interactions négligés dans la LD et qui peuvent être amenés à jouer un rôle sont les termes de masse. Si on calcule le rapport entre ces termes de masse et le terme cinétique de ϕ , on obtient²¹

$$\frac{M_P^2 m^2 h^2}{M_P^2 m^4 \partial^2 \phi} \sim R^2 m^2. \quad (2.121)$$

On en conclut que la solution de la LD est valide jusqu'à $R \sim m^{-1}$. On aurait pu le même résultat en comparant le comportement (2.70) de $h_{\mu\nu}$ dans le régime linéaire de la GM,

²¹Nous faisons ici le choix de raisonner sur les variables d'origine $h_{\mu\nu}$ et ϕ , plutôt que sur les variables normalisées $\tilde{\phi}$ et $\tilde{h}_{\mu\nu}$. Ce choix est purement conventionnel, et le même calcul donnerait bien entendu le même résultat avec les variables normalisées.

et le comportement (2.111) dans le régime linéaire de la DL. Les deux comportements ne sont comparables que pour $R < m^{-1}$, notamment lorsque l'exponentielle de Yukawa ne joue pas de rôle dans (2.70).

Pour $R < R_V$, la situation est plus compliquée à analyser, puisqu'il nous faut connaître la solution à l'intérieur du rayon de Vainshtein pour comparer les termes non-linéaires au terme cubique (2.100). Il est donc encore un peu tôt dans ce mémoire pour conclure sur cette question, et nous renvoyons une nouvelle fois le lecteur à la Section 5.1. Nous nous contenterons ici de dire que chaque terme non-linéaire devient important à une échelle qui lui est propre, et qui dépend à la fois du terme en question et du comportement de la solution à l'intérieur du rayon de Vainshtein. Nous verrons qu'il existe, pour le terme de masse AGS (2.43) une solution de la LD telle que les corrections à la LD sont négligeables jusqu'au rayon $R \sim R_S$.

2.5.2 Vers une solution globale de la gravité massive

Nous avons maintenant exposé tous les éléments nécessaires à l'établissement d'une démarche menant à la mise en évidence d'une solution globale de la gravité massive. Nous introduirons en détail au Chapitre 3 les équations du mouvement à symétrie sphérique de la gravité massive et les différents types de solutions sous forme de séries qu'il est possible de déterminer, puis nous nous tournerons au Chapitre 4 vers l'étude de la gravité massive dans la limite de découplage. Cette étude de la LD, qui suivra l'analyse développée dans l'article [30], nous permettra de trouver une solution globale de la LD de la gravité massive. Connaissant cette solution, il sera possible de vérifier au Chapitre 5 que les non-linéarités négligées par la LD sont effectivement négligeables pour R appartenant à $[R_S, m^{-1}]$ dans le cas d'un trou noir ou d'une étoile compacte, et pour R appartenant à $[0, m^{-1}]$ dans le cas d'une source étendue. Cette solution sera donc un excellent candidat pour construire une solution du système complet. Nous montrerons alors qu'une telle solution globale de la gravité massive existe bien [28]. Enfin, nous pourrons utiliser notre meilleure compréhension du mécanisme de Vainshtein, acquise au travers de la gravité massive, pour construire une nouvelle classe de modèles de gravité, appelés modèles de *k-Mouflage* [27], qui modifient la gravité à grandes distances, tout en garantissant un régime proche de la RG à courtes distances grâce à un mécanisme similaire au mécanisme de Vainshtein pour la gravité massive.

Chapitre 3

Solutions à symétrie sphérique de la gravité massive : une introduction

Sommaire

3.1	Equations et anstanz à symétrie sphérique	72
3.1.1	Choix de la forme des métriques	72
3.1.2	Les équations du mouvement	73
3.2	Développement en série à grandes distances	76
3.2.1	Développement sous forme de série formelle	76
3.2.2	Convergence du développement en série	81
3.2.3	Unicité de la solution loin de la source	82
3.3	Développement en série au voisinage de la source	83
3.3.1	Ordre 0 : la Relativité Générale retrouvée	83
3.3.2	Ordre 1 et rayon de Vainshtein	85
3.3.3	Une classe de solutions autre que celle de Vainshtein	86
3.4	L'existence d'une solution globale en débat	86
3.4.1	Conditions aux bords et approches numériques	87
3.4.2	Solutions singulières... ou instabilité numérique ?	91

La question de l'existence de solutions à symétrie sphérique de la gravité massive (GM) a été étudiée et débattue à de nombreuses reprises dans la littérature [17, 40, 47, 49, 77, 85, 101, 157, 158, 228, 269, 270, 292]. Elle est très importante à éclaircir si l'on veut valider ou infirmer la conjecture de Vainshtein, et plus généralement si l'on veut pouvoir construire des modèles de gravité modifiée basés sur le mécanisme de Vainshtein. L'étude de ces solutions à symétrie sphérique de la GM a constitué une part importante de mon travail de thèse, et nous y reviendrons donc à de multiples reprises au cours de ce mémoire. Avant de présenter, aux Chapitres 4 et 5, les résultats nouveaux auxquels nous sommes parvenus [28, 29, 30], il est utile de prendre le temps d'introduire en détail les éléments nécessaires à l'étude de ces solutions. C'est pourquoi ce chapitre est consacré au rappel des équations à symétrie sphérique que l'on cherchera à résoudre et au résumé des principaux résultats

obtenus précédemment dans la littérature sur le sujet¹.

Dans un premier temps, nous présenterons la forme des métriques qu'il convient d'utiliser dans le cadre des solutions à symétrie sphérique, ainsi que les équations qu'il s'agit d'étudier. Étant donnée la complexité de ces équations, il n'est pas réaliste de chercher à les résoudre en toute généralité ; il est cependant possible de rechercher des solutions sous forme de développements en séries, comme nous l'avons mentionné à la section 2.3.3. Nous détaillerons ici la forme de ces solutions, à grandes distances puis à petites distances. Enfin, nous évoquerons la question de l'existence d'une solution globale et mentionnerons les aspects numériques qui peuvent rendre l'étude de ces solutions difficile.

3.1 Equations et ansatz à symétrie sphérique

Dans cette section, nous voudrions tout d'abord préciser l'ansatz que nous utiliserons pour les métriques $f_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu}$, puis écrire les équations du mouvement de la gravité massive correspondantes.

3.1.1 Choix de la forme des métriques

L'ansatz le plus général pour les solutions statiques à symétrie sphérique de la gravité massive définie par l'action (2.39) s'écrit

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= -J(r)dt^2 + K(r)dr^2 + L(r)r^2d\Omega^2, \\ f_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= -C(r)dt^2 + 2D(r)dt dr + A(r)dr^2 + B(r)d\Omega^2, \end{aligned}$$

où $d\Omega^2$ est l'élément de surface sur la 2-sphère de rayon unité

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2.$$

Il n'est pas possible de choisir une jauge dans laquelle les métriques soient toutes les deux sous une forme diagonale sans restreindre *a priori* la classe de solutions considérées. En effet, l'action n'étant invariante que sous les difféomorphismes (2.38) communs aux deux métriques, si l'on redéfinit la coordonnée temporelle $dt \rightarrow dt + (D/C)dr$ pour imposer $D(r) = 0$, la métrique $g_{\mu\nu}$ s'en trouve modifiée et n'est alors plus diagonale. Le cas où $D(r) \neq 0$ a été étudié dans la littérature [39, 40, 46, 47, 85, 158, 228] et les solutions explicites de la gravité massive sont connues dans ce cas-là.

Nous souhaitons nous concentrer ici sur le cas $D(r) = 0$, c'est-à-dire que nous restreindrons l'étude des solutions à symétrie sphérique de la GM au cas bi-diagonal, pour lequel aucune solution analytique n'est connue. Nous supposons de plus que la métrique de fond $f_{\mu\nu}$ est plate et la métrique $g_{\mu\nu}$ diagonale et asymptotiquement plate. Dans ce cas, le choix de jauge (appelé jauge "a,b,c" dans [85]) le plus simple est sans doute celui dans lequel les métriques prennent la forme

$$\begin{aligned} g_{AB}dx^A dx^B &= -J(r)dt^2 + K(r)dr^2 + L(r)r^2d\Omega^2, \\ f_{AB}dx^A dx^B &= -dt^2 + dr^2 + r^2d\Omega^2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

¹Il s'agira en fait d'un peu plus que de simples rappels, puisque les résultats de la section 3.2 sont en grande partie nouveaux, et seront présentés dans le futur article [29].

Un changement de coordonnées évident $X^A(X')$

$$\begin{aligned} z &= r \cos \theta, \\ x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \end{aligned}$$

met la métrique f_{AB} sous la forme canonique de Minkowski η_{AB}

$$f_{AB}dx^A dx^B = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (3.2)$$

Si l'on compare cette forme (3.2) de la métrique f avec l'expression (2.86), on voit que cette dernière jauge correspond à la jauge *unitaire* que nous avons introduit à l'équation (2.87). Dans cette jauge, toutes les fonctions inconnues font partie de la métrique $g_{\mu\nu}$; par extension, nous qualifierons également la jauge (3.1) d'unitaire, car elle partage cette particularité de concentrer toutes les inconnues dans la métrique g .

On peut bien entendu faire un changement de jauge² de façon à réintroduire explicitement une inconnue dans la métrique f . Un choix particulièrement intéressant est celui où la métrique physique g prend la forme usuelle de la métrique de Schwarzschild

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= -e^{\nu(R)}dt^2 + e^{\lambda(R)}dR^2 + R^2d\Omega^2, \\ f_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= -dt^2 + \left(1 - \frac{R\mu'(R)}{2}\right)^2 e^{-\mu(R)}dR^2 + e^{-\mu(R)}R^2d\Omega^2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

où le prime représente la dérivée par rapport à R . Le changement de coordonnées entre les formes (3.1) et (3.3) est donné par

$$Re^{-\mu(R)/2} = r, \quad (3.4)$$

tandis que les fonctions entrant dans les définitions des métriques sont reliées par

$$\begin{aligned} J(r) &= e^{\nu(R)}, \\ K(r) &= e^{\lambda(R)}e^{\mu(R)} \left(1 - \frac{R\mu'(R)}{2}\right)^{-2}, \\ L(r) &= e^{\mu(R)}. \end{aligned}$$

Ce choix de jauge est appelé “jauge λ, μ, ν ” dans [85], ou encore “jauge de Schwarzschild”. À ce titre, rappelons que la solution de Schwarzschild correspond à $\nu = \nu_{GR} \equiv \ln(1 - R_S/R)$ et $\lambda = \lambda_{GR} \equiv -\nu_{GR}$, où $R_S \equiv 2GM$ est le rayon de Schwarzschild de la source.

3.1.2 Les équations du mouvement

Considérons à présent une source statique, à symétrie sphérique et faisons l'hypothèse que son tenseur énergie-impulsion T_μ^ν est celui d'un fluide parfait, c'est-à-dire que

$$T_\mu^\nu = \text{diag}(-\rho, P, P, P).$$

²Selon la terminologie introduite à la section 2.4.2, un tel changement de jauge permet de réintroduire explicitement les champs de Goldstone. Cette analogie est détaillée dans [30].

Supposons de plus que la source est de rayon R_\odot ; sa masse totale est alors définie par

$$M \equiv \int_0^{R_\odot} 4\pi R^2 \rho \, dR.$$

Dans la jauge (3.3), l'équation de conservation de la matière au sein de la source prend la forme

$$P' = -\frac{\nu'}{2}(\rho + P). \quad (3.5)$$

Les équations du mouvement (2.44) pour la métrique $g_{\mu\nu}$ dans la jauge (3.3) s'écrivent³

$$\begin{aligned} e^{\nu-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{R} + \frac{1}{R^2}(e^\lambda - 1) \right) &= m^2 f_t(\lambda, \nu, \mu', \mu, R) + 8\pi G \rho e^\nu, \\ \frac{\nu'}{R} + \frac{1}{R^2}(1 - e^\lambda) &= m^2 f_R(\lambda, \nu, \mu', \mu, R) + 8\pi G P e^\lambda, \end{aligned} \quad (3.6)$$

où les fonctions f_t et f_R sont définies au travers de

$$f_t(\lambda, \nu, \mu', \mu, R) \equiv \frac{8\pi G}{m^2} T_{tt}^{(g)}, \quad (3.7)$$

$$f_R(\lambda, \nu, \mu', \mu, R) \equiv \frac{8\pi G}{m^2} T_{RR}^{(g)}, \quad (3.8)$$

à partir du tenseur $T_{\mu\nu}^{(g)}$, qui est le tenseur énergie-impulsion effectif (2.46) provenant de la variation par rapport à la métrique du terme de masse (2.41). Pour compléter le système d'équations, il est possible d'utiliser la seule composante non nulle des identités de Bianchi⁴ (2.48), qui mène à l'équation

$$-\frac{1}{R} f_g(\lambda, \lambda', \nu, \nu', \mu, \mu', \mu'', R) \equiv -\frac{1}{m^2 M_P^2} \frac{1}{R} \nabla^\mu T_{\mu R}^g = 0. \quad (3.9)$$

À l'ordre linéaire, les fonctions f_t, f_R, f_g sont entièrement déterminées par le terme de Paul-Fierz (PF) et sont par conséquent indépendantes du terme de masse (à condition que la théorie considérée appartienne à la classe de théories de PF) :

$$\begin{aligned} f_t^{(lin)} &= -\frac{1}{2}(\lambda + 3\mu + R\mu'), \\ f_R^{(lin)} &= \frac{1}{2}(\nu + 2\mu), \\ f_g^{(lin)} &= \frac{\nu'}{2} - \frac{\lambda}{R}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Par contre, au-delà de l'ordre linéaire, ces fonctions dépendent du terme masse ; dans le cas des termes de BD (2.42) et AGS (2.43), auxquels nous accorderons une importance

³Nous suivons ici les notations de [85].

⁴Notons qu'il serait également possible d'utiliser la composante $\theta\theta$ des équations d'Einstein. On peut montrer que l'équation obtenue est équivalente à l'équation (3.9), lorsque les équations (3.5), (3.6) sont vérifiées.

particulière dans la suite de ce mémoire, leur expressions prennent la forme [85]

$$\begin{aligned}
f_t^{(BD)} &= \frac{1}{2} e^{(3\nu-3\mu-\lambda)/2} \left[e^{\lambda+\mu} \left(1 - \frac{R\mu'}{2} \right)^{-1} + (2e^\mu - 3) \left(1 - \frac{R\mu'}{2} \right) \right] \\
f_R^{(BD)} &= -\frac{1}{2} e^{(3\lambda-\mu-\nu)/2} (2e^\mu + e^\nu - 3) \left(1 - \frac{R\mu'}{2} \right)^{-1} \\
f_g^{(BD)} &= \frac{e^{-(\lambda+3\mu+\nu)/2}}{8} \left[-2\lambda' e^{\lambda+\mu} (2e^\mu + e^\nu - 3) \left(1 - \frac{R\mu'}{2} \right) \right. \\
&\quad + \frac{2e^\nu}{R} (4e^\mu + R\nu' (2e^\mu - 3)) \left(1 - \frac{R\mu'}{2} \right)^3 \\
&\quad + \frac{e^{\mu+\lambda}}{R} (-8(e^\mu - 3) - 4R\mu' (e^\mu + 3) + R^2 \mu'^2 (2e^\mu + 3) - 2R^2 \mu' (2e^\mu - 3)) \\
&\quad - \frac{e^{\lambda+\mu+\nu}}{R} (8 + 2R\nu' + R\mu' (R\mu' - R\nu' - 4) + 2R^2 \mu'') \\
&\quad \left. + \frac{8e^\mu}{R} (e^\mu - 3) \left(1 - \frac{R\mu'}{2} \right)^3 \right] \left(1 - \frac{R\mu'}{2} \right)^{-2} \tag{3.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_t^{(AGS)} &= \frac{1}{16} e^{-\lambda-2\mu} \left[(e^\mu - 2e^\nu + 3e^{\mu+\nu}) R^2 \mu'^2 - 4(e^\mu - 2e^\nu + 3e^{\mu+\nu}) R\mu' \right. \\
&\quad \left. - 4(-e^\mu - 2e^{\lambda+\mu} + 3e^{\lambda+2\mu} + 2e^\nu + e^{\lambda+\nu} - 3e^{\mu+\nu} - 6e^{\lambda+\mu+\nu} + 6e^{\lambda+2\mu+\nu}) \right], \\
f_R^{(AGS)} &= \frac{1}{16} e^{-2\mu-\nu} \left[(-e^\mu - 2e^\nu + 3e^{\mu+\nu}) R^2 \mu'^2 - 4(-e^\mu - 2e^\nu + 3e^{\mu+\nu}) R\mu' \right. \\
&\quad \left. + 4(-e^\mu + 2e^{\lambda+\mu} - 3e^{\lambda+2\mu} - 2e^\nu + e^{\lambda+\nu} + 3e^{\mu+\nu} - 6e^{\lambda+\mu+\nu} + 6e^{\lambda+2\mu+\nu}) \right], \\
f_g^{(AGS)} &= \frac{1}{16R} e^{-\lambda-2\mu-\nu} (R\mu' - 2) \left\{ [(e^\mu + 4e^\nu - 3e^{\mu+\nu}) \mu'^2 - (e^\mu + 2e^\nu - 3e^{\mu+\nu}) \lambda' \mu' \right. \\
&\quad - (e^\mu - 2e^\nu + 3e^{\mu+\nu}) \nu' \mu' - 2(-e^\mu - 2e^\nu + 3e^{\mu+\nu}) \mu''] R^2 \\
&\quad + 2[(-e^\mu - 2e^\nu + 3e^{\mu+\nu}) \lambda' - 4(e^\mu + 2e^\nu - 3e^{\mu+\nu}) \mu' \\
&\quad \left. - (e^\mu - 2e^\nu + 3e^{\mu+\nu}) \nu'] R + 8(-1 + e^\lambda) (-e^\mu - e^\nu + 3e^{\mu+\nu}) \right\}. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Les équations (3.5), (3.6) et (3.9) forment le système d'équations que nous voulons résoudre. Cependant, résoudre un tel système n'est pas chose aisée, comme le montre assez clairement la forme complexe des expressions (3.11) et (3.12). Au Chapitre 4, nous verrons qu'il est possible de mieux appréhender ce système d'équation en étudiant sa forme simplifiée dans la limite de découplage. On peut également opter pour une approche numérique (elle-même ardue) : ce sera l'objet du Chapitre 5. Nous nous contenterons pour l'instant d'étudier cette question en recherchant une solution sous la forme de deux développements en séries, valable à grandes distances pour l'un, et à petites distances pour l'autre.

3.2 Développement en série à grandes distances

Nous avons brièvement évoqué à la section 2.3.3 le développement (2.69) en puissance de la constante de Newton G de la solution et des équations du mouvement. Nous avons alors mentionné le fait que les premières corrections (2.71) et (2.72) au-delà de l'ordre linéaire (2.70) devenaient importantes, non pas à partir du rayon de Schwarzschild comme en RG, mais pour des distances de l'ordre du rayon de Vainshtein. Nous souhaitons dans cette section revenir plus longuement sur ce développement en puissance de G , afin d'en donner la forme complète, et d'en discuter la convergence et l'unicité.

3.2.1 Développement sous forme de série formelle

En premier lieu, et ce afin de travailler avec des quantités sans dimension, introduisons la variable

$$z = Rm ; \quad (3.13)$$

pour alléger les notations, on notera encore avec un prime la dérivée par rapport à z de toute fonction $f(z)$. On peut alors écrire le système d'équations (3.6) et (3.9) en séparant explicitement les termes linéaires des termes non-linéaires :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda'}{z} + \frac{\lambda}{z^2} + \frac{1}{2}(\lambda + 3\mu + z\mu') &= f_{t,\geq 2} - G_{tt,\geq 2} , \\ \frac{\nu'}{z} - \frac{\lambda}{z^2} - \frac{1}{2}(\nu + 2\mu) &= f_{R,\geq 2} - G_{RR,\geq 2} , \\ \frac{\lambda}{z^2} - \frac{\nu'}{2z} &= \frac{1}{z}f_{g,\geq 2}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

où l'on a utilisé l'expression linéaire (3.10) des fonctions f_i et où les $f_{i,\geq 2}$ et $G_{ii,\geq 2}$ correspondent respectivement à la partie non-linéaire des fonctions f_i et des composantes du tenseur d'Einstein en coordonnées sphériques. Ces fonctions ont des dépendances en λ, ν, μ et en z différentes :

- les fonctions $f_{t,\geq 2}$ et $f_{R,\geq 2}$ proviennent du terme de masse, et par conséquent ne peuvent dépendre que de $\lambda, \nu, \mu, z\mu'$. Si on les développe en puissances de λ, ν, μ et $z\mu'$, les fonctions $f_{t,\geq 2}$ et $f_{R,\geq 2}$ s'écrivent donc comme sommes de termes de la forme $\lambda^{n_1}\nu^{n_2}\mu^{n_3}(z\mu')^{n_4}$,
- les fonctions $G_{tt,n}$ et $G_{RR,n}$ sont issues du tenseur d'Einstein, exprimé dans la jauge (3.3). Leur expression est donnée dans les membres de gauches des équations (3.6) ; on peut alors voir que ces fonctions s'écrivent comme des sommes de termes de la forme $\lambda^{n_1}\nu^{n_2}z^{-2}$, $\lambda^{n_1}\nu^{n_2}\nu'z^{-1}$ ou $\lambda^{n_1}\nu^{n_2}\lambda'z^{-1}$,
- la fonction f_g correspond à l'identité de Bianchi (3.9), c'est-à-dire à la dérivée du terme de masse ; elle est donc composée de la somme de termes de type $\lambda^{n_1}\nu^{n_2}\mu^{n_3}(z\mu')^{n_4}z^{-1}$, $\lambda^{n_1}\nu^{n_2}\mu^{n_3}(z\mu')^{n_4}\mu''$, $\lambda^{n_1}\nu^{n_2}\mu^{n_3}(z\mu')^{n_4}\nu'$,

Nous voulons rechercher une solution sous la forme d'un développement en puissance d'un petit paramètre ϵ , que l'on supposera proportionnel à la constante de Newton G . Nous

choisirons comme paramètre

$$\epsilon = R_S \times m. \quad (3.15)$$

Les fonctions λ , ν et μ se décomposent alors selon

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \lambda_1 + \dots \\ \nu &= \nu_0 + \nu_1 + \dots \\ \mu &= \mu_0 + \mu_1 + \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

où les λ_i, ν_i, μ_i sont supposés proportionnels à ϵ^{i+1} et tels que $\lambda_{i+1} \ll \lambda_i$, $\nu_{i+1} \ll \nu_i$ et $\mu_{i+1} \ll \mu_i$.

Supposons maintenant que l'on connaisse la solution jusqu'à l'ordre n ; le système à l'ordre $(n+1)$ prend la forme

$$\begin{aligned} \frac{\lambda'_{n+1}}{z} + \frac{\lambda_{n+1}}{z^2} + \frac{1}{2}(\lambda_{n+1} + 3\mu_{n+1} + z\mu'_{n+1}) &= f_{t,n} - G_{tt,n}, \\ \frac{\nu'_{n+1}}{z} - \frac{\lambda_{n+1}}{z^2} - \frac{1}{2}(\nu_{n+1} + 2\mu_{n+1}) &= f_{R,n} - G_{RR,n}, \\ \frac{\lambda_{n+1}}{z^2} - \frac{\nu'_{n+1}}{2z} &= \frac{1}{z}f_{g,n}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Les fonctions $f_{t,n}$, $f_{R,n}$, $f_{g,n}$, $G_{tt,n}$ et $G_{RR,n}$ correspondent respectivement aux termes d'ordre ϵ^{n+1} de f_t , f_R , f_g , G_{tt} et G_{RR} .

Dans les lignes qui vont suivre, nous voudrions montrer, par récurrence, que les fonctions λ_n , μ_n et ν_n peuvent être développées selon

$$\begin{aligned} \mu_n &= \epsilon^{n+1} e^{-(n+1)z} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\mu_{n,i,k}}{z^{3+5n-i}} \log^k z, \\ \lambda_n &= \epsilon^{n+1} e^{-(n+1)z} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_{n,i,k}}{z^{1+5n-i}} \log^k z, \\ \nu_n &= \epsilon^{n+1} e^{-(n+1)z} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\nu_{n,i,k}}{z^{1+5n-i}} \log^k z, \end{aligned} \quad (3.18)$$

avec les contraintes additionnelles $\mu_{n,0,k>0} = \lambda_{n,0,k>0} = \nu_{n,0,k>0} = 0$.

Montrons tout d'abord que cette hypothèse est valide à l'ordre le plus bas, c'est-à-dire à l'ordre linéaire. Il s'agit alors de résoudre le système (3.17) avec $n = -1$:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda'_0}{z} + \frac{\lambda_0}{z^2} + \frac{1}{2}(\lambda_0 + 3\mu_0 + z\mu'_0) &= 0, \\ \frac{\nu'_0}{z} - \frac{\lambda_0}{z^2} - \frac{1}{2}(\nu_0 + 2\mu_0) &= 0, \\ \frac{\lambda_0}{z^2} - \frac{\nu'_0}{2z} &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Il est possible d'obtenir une équation ne contenant que μ_0 , en éliminant λ_0 et ν_0 ; le système est alors équivalent à

$$\begin{aligned}\nu'_0(z) &= 2 \frac{\lambda_0(z)}{z}, \\ \lambda_0(x) &= -\frac{z^2 \mu_0(z) + z^3 \mu'_0(z)}{2 + z^2}, \\ 0 &= 3z(4 + z^2)\mu_0(z) - 6(z^2 + 4)\mu'_0(z) - 3z(z^2 + 2)\mu''_0(z),\end{aligned}\quad (3.20)$$

qui a pour solution

$$\begin{aligned}\nu_0 &= -(K\epsilon) \frac{4}{3z} e^{-z}, \\ \lambda_0 &= (K\epsilon) \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{z}\right) e^{-z}, \\ \mu_0 &= (K\epsilon) \frac{2}{3z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) e^{-z},\end{aligned}\quad (3.21)$$

où seule la solution décroissante a été conservée et où K est une constante d'intégration sans dimension, que l'on supposera de l'ordre de l'unité. On retrouve là la solution (2.70) que nous avons donnée au Chapitre 2, et qui est bien de la forme (3.18).

Supposons maintenant que la forme (3.18) soit satisfaite par les fonctions λ_m , ν_m et μ_m jusqu'à l'ordre n . On peut réorganiser le système (3.17) de façon à obtenir le système équivalent

$$\nu'_{n+1} = \frac{2\lambda_{n+1}}{z} - 2f_{g,n}, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}\lambda_{n+1} &= -\frac{z^2 \mu_{n+1} + z^3 \mu'_{n+1}}{2 + z^2} \\ &\quad - \frac{1}{3(2 + z^2)} [-2z^2 f_{t,n} + 2z^3 f'_{R,n} + 2z^2 G_{tt,n} - 2z^3 G'_{RR,n} \\ &\quad - 2z(2 + z^2) f_{g,n} + 4z^3 f'_{g,n}],\end{aligned}\quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}0 &= 3z(4 + z^2)\mu_{n+1}(z) - 6(z^2 + 4)\mu'_{n+1}(z) - 3z(z^2 + 2)\mu''_{n+1}(z) \\ &\quad - 2z(4 + z^2)f_{t,n} + 2(2 + z^2)f'_{t,n} - (16 + 6z^2 + z^4)f'_{R,n} - (4z + 2z^3)f''_{R,n} \\ &\quad + 2z(4 + z^2)G_{tt,n} - (4 + 2z^2)G'_{tt,n} + (16 + 6z^2 + z^4)G'_{RR,n} + (4z + 2z^3)G''_{RR,n} \\ &\quad + \frac{(2 + z^2)^2(4 + z)}{z^2} f_{g,n} - \frac{16}{z} f'_{g,n} - (8 + 4z^2)f''_{g,n}.\end{aligned}\quad (3.24)$$

Concentrons-nous dans un premier temps sur la dernière équation, qui permet de déterminer μ_{n+1} . On peut regrouper les termes sous la forme

$$L[\mu_{n+1}] = F[\{\mu_{m \leq n}, \lambda_{m \leq n}, \nu_{m \leq n}\}], \quad (3.25)$$

où L représente l'opérateur différentiel linéaire

$$L[f] \equiv -3z(4 + z^2)f(z) + 6(z^2 + 4)f'(z) + 3z(z^2 + 2)f''(z) \quad (3.26)$$

et où F regroupe les termes non-linéaires de l'équation (3.24), qui ne dépendent que des termes d'ordre $m \leq n$. Remarquons que l'on comprend ici la nécessité d'inclure des logarithmes dans le développement (3.18) : on peut en effet se rendre compte qu'il se produit, pour $f(z) = z^{-3}$, des compensations entre les différents composantes de l'opérateur linéaire, de telle sorte que

$$L[z^{-3}] \sim z^{-2} \not\sim z^{-4}. \quad (3.27)$$

Ces compensations n'influent par sur la forme des termes dominants des développements (3.18), mais empêchent de trouver une solution sous forme de série de Laurent en simples puissances de z ; inclure des logarithmes permet de contourner cette difficulté.

En ce qui concerne le développement de μ_{n+1} , compte tenu de la forme de l'équation (3.24) et de la décomposition (3.18), on peut se convaincre que l'on peut résoudre cette équation (3.24) si l'on suppose que μ_{n+1} se décompose selon

$$\mu_{n+1} = (K\epsilon)^{n+1} e^{-(n+1)z} \sum_{i=i_{min}}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\mu_{n+1,i,k}}{z^{p_{max}-i}} \log^k z, \quad (3.28)$$

où p_{max} est un entier à déterminer. Afin de montrer que $p_{max} = 3 + 5(n+1)$, il nous faut nous concentrer sur les termes dominants de l'équation (3.25) lorsque $z \rightarrow 0$. Le membre de gauche de (3.25) peut être simplifié dans la limite $z \rightarrow 0$ en

$$L[\mu_{n+1}] \sim -24\mu'_{n+1} - 6z\mu''_{n+1}, \quad (3.29)$$

dont le comportement asymptotique est alors donné par

$$L[\mu_{n+1}] \sim \frac{1}{z^{p_{max}+1}}. \quad (3.30)$$

On peut maintenant chercher le comportement asymptotique du terme non-linéaire $F[\{\mu_{m \leq n}, \lambda_{m \leq n}, \nu_{m \leq n}\}]$. En utilisant les développements (3.18), et la forme des fonctions $f_{i, \geq 2}$ et $G_{ii, \geq 2}$ que nous avons détaillée juste au-dessous du système (3.14), on peut étudier le terme dominant de ces fonctions. Ainsi, étant donné que

$$\mu_m \sim z^{-3-5m} \gg \lambda_m, \nu_m \sim z^{-1-5m} \quad \text{pour } z \rightarrow 0, \quad (3.31)$$

on peut voir que les fonctions $f_{t,n}$ et $f_{R,n}$ sont dominées par des monômes ne contenant que des termes μ_m ou $z\mu'_m$, et sont donc de la forme

$$\begin{aligned} f_{t,n} \sim f_{R,n} &\sim \mu_{k_1} \mu_{k_2} \dots \mu_{k_j}, \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^j (k_i + 1) = n + 2 \\ &\sim z^{-3j-5 \sum_{i=1}^j (k_i+1)} \\ &\sim z^{2j-5(n+2)}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Le terme le plus divergent correspondra à $j = 2$, ce qui donne

$$f_{t,n} \sim f_{R,n} \sim z^{-1-5(n+1)}. \quad (3.33)$$

En raisonnant de même, on voit que

$$\begin{aligned}
 G_{tt,n} \sim G_{RR,n} &\sim \frac{1}{z^2} \nu_{k_1} \nu_{k_2} \dots \nu_{k_j}, \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^j (k_i + 1) = n + 2 \\
 &\sim z^{-2-j-5 \sum_{i=1}^j (k_i+1)} \sim z^{-2+4j-5(n+2)} \\
 &\sim z^{1-5(n+1)},
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

et qu'enfin

$$\begin{aligned}
 f_{g,n} &\sim \frac{1}{z} \mu_{k_1} \mu_{k_2} \dots \mu_{k_j}, \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^j (k_i + 1) = n + 2 \\
 &\sim z^{-1-3j-5 \sum_{i=1}^j (k_i+1)} \sim z^{-1+2j-5(n+2)} \\
 &\sim z^{-2-5(n+1)}.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

En utilisant ces comportements asymptotiques pour $z \rightarrow 0$, on trouve que

$$F[\{\mu_{m \leq n}, \lambda_{m \leq n}, \nu_{m \leq n}\}] \sim \frac{1}{z^{4+5(n+1)}}. \tag{3.36}$$

Si l'on compare (3.36) à (3.30), on voit que

$$p_{max} = 3 + 5(n + 1), \tag{3.37}$$

comme attendu. Il est ensuite aisé de procéder à un raisonnement similaire pour prouver que le comportement dominant des fonctions λ_{n+1} et ν_{n+1} correspond à celui du développement (3.18). On a alors montré que le développement (3.18) était valide à l'ordre $n + 1$, et par récurrence, à tout ordre.

Il est à noter que la forme de ce développement avait été esquissée dans les équations (62) et (63) de l'article [85]; cependant, la forme de la série proposée dans cet article [85] était incomplète. Le développement (3.18) et la preuve que l'on vient d'exposer constituent donc un résultat nouveau, qui sera présenté dans l'article [29].

D'un point de vue pratique, pour obtenir les coefficients $\mu_{n+1,i,k}$ à partir de $\mu_{m \leq n}$, $\lambda_{m \leq n}$ et $\nu_{m \leq n}$, il faut procéder ordre par ordre en $\log z$ et en z . Plus précisément, on utilise tout d'abord la forme (3.18) de $\mu_{m \leq n}$, $\lambda_{m \leq n}$ et $\nu_{m \leq n}$ pour développer le terme non-linéaire F en série de la forme

$$F[\{\mu_{m \leq n}, \lambda_{m \leq n}, \nu_{m \leq n}\}] = (K\epsilon)^{n+1} e^{-(n+1)z} \sum_{i=i_{min}}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{F_{n+1,i,k}}{z^{4+5(n+1)-i}} \log^k z. \tag{3.38}$$

On effectue ensuite un développement semblable pour le terme $L[\mu_{n+1}]$, en utilisant la forme (3.28). On ajuste ensuite les coefficients $\mu_{n+1,i,k}$ ordre par ordre en puissance de $\log z$, en commençant par la plus grande puissance présente. Pour chaque puissance de $\log z$, c'est à dire pour chaque k , on résout ordre par ordre en puissance de z , c'est-à-dire qu'on détermine les coefficients $\mu_{n+1,i,k}$ pour $i = 0 \dots \infty$, en commençant par $i = 0$.

Par exemple, le début du développement de la fonction μ_1 pour le terme de masse AGS (2.43) s'écrit

$$\begin{aligned} \mu_1(z) = & (K\epsilon)^2 e^{-2z} \times \\ & \left(\frac{4}{3z^8} + \frac{8}{3z^7} + \frac{34}{27z^6} - \frac{28}{27z^5} - \frac{73}{36z^4} + \frac{C_1^{(1)} + C_2^{(1)}}{z^3} + \frac{155}{54z^2} \right. \\ & \left. + \frac{323 + 54C_1^{(1)} + 54C_2^{(1)}}{108z} + \frac{-48C_1^{(1)} + 48C_2^{(1)} + 61 \log z}{72} + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

On remarque la présence de deux constantes d'intégrations $C_1^{(1)}$ et $C_2^{(1)}$, qui correspondent aux solutions de l'équation homogène $L[\mu_{n+1}] = 0$. En fait, à chaque ordre n , il est possible d'ajouter à la série obtenue terme par terme la solution homogène

$$C_1^{(n+1)} \left(\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} \right) e^{-z} + C_2^{(n+1)} \left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} \right) e^z. \quad (3.40)$$

Il est important de noter que la procédure qui permet de trouver les $\mu_{n+1,i,k}$ ordre par ordre en $\log z$ et en z ne permet pas de fixer la valeur de ces constantes; autrement dit, il n'est pas garanti que la solution sous forme de série obtenue ordre par ordre en $\log z$ et en z ne contienne pas une solution homogène (3.40) en son sein; dans ce cas la série obtenue ne se comporte pas comme $e^{-(n+1)z}$ pour $z \gg 1$, mais est dominée par la solution homogène à grandes distances. Pour fixer les constantes $C_1^{(n+1)}$ et $C_2^{(n+1)}$, il faut considérer le comportement de la série obtenue ordre par ordre en $\log z$ et en z pour $z \rightarrow \infty$, ajouter la solution homogène générale (3.40), puis choisir les constantes $C_1^{(n+1)}$ et $C_2^{(n+1)}$ de telle sorte que la solution obtenue ait alors une décroissance du type $\mu_{n+1} \propto e^{-(n+1)z}$ pour $z \gg 1$. Il est clair que cette procédure est très difficile, puisqu'elle requiert de calculer une infinité de termes de la série (3.18).

3.2.2 Convergence du développement en série

Maintenant que nous avons prouvé la validité du développement (3.18) et présenté comment en calculer les termes en pratique, il nous faut étudier sa convergence. Bien entendu, une telle étude, pour être rigoureuse, impose de connaître la forme précise des coefficients $\lambda_{n,i,k}$, $\nu_{n,i,k}$ et $\mu_{n,i,k}$, ce qui n'est pas notre cas. Néanmoins, il est instructif, dans un premier temps, de faire l'hypothèse que ces coefficients sont d'ordre 1 et qu'ils ne jouent donc pas de rôle majeur dans la convergence des séries (3.18).

À grandes distances, ce sont les sommes sur i et k qui menacent de diverger. On voit en effet que la série n'est a priori plus valable pour $z > 1$, c'est-à-dire $R > m^{-1}$. Ceci dit, d'un point de vue pratique (notamment numérique), il n'est pas vraiment nécessaire de connaître un développement de la solution au-delà de $R \sim m^{-1}$ car la solution linéaire (3.21) est suffisante pour approcher la solution avec une très bonne précision.

À petites distances, c'est la somme sur n qui menace de diverger lorsque $z^5 \sim \epsilon$, c'est-à-dire quand $R \sim R_V$. On retrouve là le résultat que l'on avait obtenu à la section 2.3.3 en comparant les termes (2.71) et (2.72) d'ordre 1 et la solution linéaire (2.70).

Nous avons donc montré que le développement (3.18) est *a priori* valable dans l'intervalle $R_V \ll R \ll m^{-1}$.

Il est intéressant de prendre formellement la limite $m \rightarrow 0$ dans ce développement (ce qui est équivalent à l'hypothèse $R \ll m^{-1}$, ou encore $z \ll 1$). Cela revient à ne garder que les termes tels que $i = k = 0$. Par exemple, la série pour μ prend la forme

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^{n+1} \frac{\mu_{n,i=0,k=0}}{z^{3+5n}}. \quad (3.41)$$

La limite $m \rightarrow 0$ correspond en fait à la limite de découplage (2.102) et nous verrons au Chapitre 4 (voir également [30], équation (4.34)) que la solution en série à grand z dans la LD prend en effet la forme (3.41). Cependant, nous verrons alors que cette série (3.41), ne converge pas ; en effet, les coefficients $\mu_{n,i=0,k=0}$ divergent trop vite et on peut en fait montrer qu'il s'agit d'une série asymptotique. Ce type de série a la particularité que pour tout z fixé, les premiers termes améliorent la précision de la série, et ce même si la série diverge à grand n . Pour chaque z , il existe alors un ordre n optimal, au-delà duquel chaque ordre supplémentaire dégrade la précision du calcul.

Dans le cas du développement (3.18), on peut montrer, en utilisant la valeur exacte des coefficients $\mu_{n,i=0,k=0}$ (que l'on peut calculer dans la LD), que la sous-série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (K\epsilon)^{n+1} e^{-(n+1)z} \frac{\mu_{n,i=0,k=0}}{z^{3+5n}} \quad (3.42)$$

diverge, en dépit de la présence des facteurs exponentiellement décroissants provenant du terme de Yukawa. Bien sûr, le fait que cette sous-série diverge ne permet pas de conclure d'une façon définitive sur la convergence de la série complète (3.18) : les sommes en jeu dans (3.18) étant infinies, il peut juste s'agir d'une mauvaise façon de sommer les termes. On peut cependant retenir de cette discussion que la convergence du développement (3.18) n'est absolument pas garantie, et que toute conclusion basée sur ce développement en tant que solution satisfaisante doit être considérée avec une certaine retenue⁵. Par contre, d'un point de vue numérique, ces développements seront extrêmement précieux, et en particulier le développement (3.41) : à condition de ne garder que les premiers ordres, ces séries permettent en effet d'approcher la solution avec une très bonne précision.

3.2.3 Unicité de la solution loin de la source

Nous voudrions aborder un dernier point, assez subtil, au sujet des solutions de la gravité massive à grandes distances : la question de l'unicité de la solution loin de la source. Posons la question d'une façon précise : supposons fixé le comportement asymptotique linéaire (3.21), et en particulier la constante d'intégration K ; supposons de plus qu'il existe une solution sur l'intervalle $[R_V, +\infty[$ qui possède exactement ce comportement asymptotique linéaire : cette solution est-elle l'unique solution de la gravité massive avec ce comportement à l'infini ? En d'autre terme, le comportement asymptotique à l'infini est-il suffisant pour déterminer entièrement la solution ?

⁵Cela nous amène ainsi à questionner la démarche proposée dans [85], Sec. IV.B, qui consiste à construire la solution de la gravité massive loin de la source à partir d'un développement (supposé implicitement convergent) de type (3.18).

Pour bien comprendre ce point, il est utile de rappeler ce qui se passe en Relativité Générale (RG). La solution de Schwarzschild à l'extérieur de la source n'est déterminée qu'à une constante d'intégration près, qui correspond à la masse de l'étoile. Pour fixer cette constante, il faut résoudre les équations du mouvement au sein de la source, puis coller les solutions intérieure et extérieure. À la question de savoir si le comportement asymptotique loin de la source suffit à déterminer d'une façon unique la solution, la réponse est évidemment *oui* : le comportement asymptotique étant juste le comportement Newtonien, le fixer revient à fixer la masse de la source, et donc fixer entièrement la solution à l'extérieur de l'étoile (c'est le théorème de Birkhoff) .

Dans le cadre de la gravité massive, la situation est plus compliquée. Pour une certaine catégorie de termes de masse, dont le terme de BD (2.42) fait partie, le comportement asymptotique permet de fixer la solution d'une façon unique. Pour d'autres termes de masse (comme le terme AGS (2.43)) par contre, le comportement asymptotique à l'infini ne suffit pas à fixer entièrement la solution. Ce résultat sera démontré dans la limite de découplage au Chapitre 4, puis généralisé à la théorie complète au Chapitre 5 et à l'Annexe C. Nous montrerons alors que pour ces termes de masse, il existe une infinité de solutions avec le même comportement asymptotique pour $R \rightarrow \infty$, parmi lesquelles il se révélera possible de trouver une solution valable pour tout R , y compris au sein de la source.

3.3 Développement en série au voisinage de la source

Nous venons de voir que le développement en série (3.18) cesse d'être valable pour des distances plus petites que le rayon de Vainshtein R_V . À l'intérieur de ce rayon, il nous faut donc trouver un autre développement en série de la solution. C'est précisément l'objet du développement en puissances de m proposé par Vainshtein dans l'article [269] que nous avons évoqué à la section 2.3.3. D'un point de vue mathématique, le développement des fonctions λ , ν et μ prend la forme

$$f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} m^{2n} f_n(R) , \quad (3.43)$$

où les f_n sont des coefficients indépendants de m . Nous allons expliquer dans les lignes qui vont suivre comment calculer ces coefficients ordre par ordre, et déterminer l'intervalle de validité d'une telle série. Nous nous concentrerons dans cette section sur la solution à l'extérieur de la source.

3.3.1 Ordre 0 : la Relativité Générale retrouvée

Par définition, l'ordre 0 en m des fonctions λ and ν correspond à la solution des équations du mouvement (3.6) avec $m^2 = 0$, qui n'est autre que la solution de Schwarzschild

$$\lambda_0 = -\nu_0 = -\ln \left(1 - \frac{R_S}{R} \right) = \frac{R_S}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{R_S}{R} \right)^2 + \dots \quad (3.44)$$

La fonction μ_0 est déterminée à partir de l'identité de Bianchi (3.9), où l'on a remplacé λ et ν par leur expression λ_0 et ν_0 et μ par la fonction inconnue μ_0

$$-\frac{1}{R} f_g [\lambda_0, \lambda'_0, \nu_0, \nu'_0, \mu_0, \mu'_0, \mu''_0] = 0. \quad (3.45)$$

On peut chercher une solution pour μ_0 sous forme de série en puissances de (R_S/R) valable loin de la source, lorsque $R \gg R_S$. Dans ce régime, les fonctions λ_0 et ν_0 tendent vers 0, ce qui signifie que le terme dominant de μ_0 est obtenu en ne gardant dans l'équation (3.45) que les termes linéaires en λ_0 et ν_0 . De plus, si l'on fait l'hypothèse que la fonction μ_0 tend également vers 0, on peut ne garder que le terme d'ordre le plus bas en μ_0 dans cette même équation. Étant donné qu'il n'y a pas de terme linéaire (cf. Eq. (3.10)), le terme d'ordre le plus bas en μ_0 est quadratique. On peut montrer (cf. l'Eq. (54), la Section 4.1.2 et l'Annexe B de [30]) que ce terme prend la forme

$$Q(\mu) = -\frac{1}{2R} \left\{ 3\alpha \left(6\mu\mu' + 2R\mu'^2 + \frac{3}{2}R\mu\mu'' + \frac{1}{2}R^2\mu'\mu'' \right) + \beta \left(10\mu\mu' + 5R\mu'^2 + \frac{5}{2}R\mu\mu'' + \frac{3}{2}R^2\mu'\mu'' \right) \right\}, \quad (3.46)$$

où les coefficients α et β dépendent du terme de masse (2.41) choisi et correspondent exactement aux coefficients α et β de l'Eq. (2.103). À l'ordre dominant, l'équation (3.45) s'écrit donc

$$\frac{\lambda_0}{R^2} = \frac{\nu_0'}{2R} + Q(\mu_0). \quad (3.47)$$

En utilisant le comportement asymptotique de la solution de Schwarzschild (3.44), c'est-à-dire le régime Newtonien, on obtient l'équation

$$Q(\mu_0) = \frac{R_S}{2R^3}. \quad (3.48)$$

Si l'on suppose avec Vainshtein que la fonction μ_0 peut être développée en puissances de R , on trouve par analyse dimensionnelle que

$$\mu_0 \sim M_0 \sqrt{\frac{R_S}{R}}, \quad (3.49)$$

où M_0 est une constante qui dépend de α et β et qui est facilement déterminée en insérant la forme (3.49) dans l'équation (3.48). Ainsi, pour le potentiel AGS (2.43) qui, rappelons-le, correspond à $\alpha = -\beta = 1/2$, la constante M_0 est solution de l'équation du second ordre

$$\frac{9}{16}M_0^2 = \frac{1}{2}. \quad (3.50)$$

Supposons que l'on choisisse la solution positive, on trouve que $M_0 = \sqrt{\frac{8}{9}}$: le cas AGS admet donc une solution "à la Vainshtein". Il est alors possible de poursuivre la résolution de l'équation (3.45) et déterminer ordre par ordre en puissances de R_S/R le développement de μ_0 .

Par contre, comme l'ont noté les auteurs de [85], pour le potentiel BD (2.42) qui correspond à $\alpha = -\beta = -1/2$, l'équation que doit satisfaire M_0 s'écrit

$$\frac{9}{16}M_0^2 = -\frac{1}{2}. \quad (3.51)$$

Cette équation n'a que des solutions imaginaires qui ne sont pas acceptables physiquement. Est-ce à dire que le mécanisme de Vainshtein ne fonctionne pas dans le cas du potentiel

de BD ? En fait, la réponse est plus nuancée : nous verrons un peu plus bas, à la Section 3.3.3 et au Chapitre 4, qu'un autre comportement asymptotique est possible, différent de celui de l'équation (3.49).

Une étude systématique de l'existence d'une solution de Vainshtein en fonction de α et β est présentée à la section 4.2.5 de [30].

3.3.2 Ordre 1 et rayon de Vainshtein

Supposons maintenant que la solution à l'ordre 0 existe (c'est-à-dire que M_0 est réelle) et qu'elle soit connue de nous. On veut déterminer les termes d'ordre 1. Les fonctions λ_1 et ν_1 sont obtenues en résolvant les équations d'Einstein (3.6). Dans la limite

$$R_S \ll R \ll m^{-1}, \quad (3.52)$$

et en utilisant le comportement (3.49), ces équations se résument à

$$\begin{aligned} \frac{\lambda'_1}{R} + \frac{\lambda_1}{R^2} &= -\frac{m^2}{2}(3\mu_0 + R\mu'_0) \\ \frac{\nu'_1}{R} - \frac{\lambda_1}{R^2} &= m^2\mu_0. \end{aligned}$$

On voit alors que les fonctions λ_1 et ν_1 sont de la forme

$$\begin{aligned} \nu_1 &= (mR)^2 \left[N_1 \sqrt{\frac{R_S}{R}} + \mathcal{O}\left(\frac{R_S}{R}\right) \right], \\ \lambda_1 &= (mR)^2 \left[L_1 \sqrt{\frac{R_S}{R}} + \mathcal{O}\left(\frac{R_S}{R}\right) \right], \end{aligned} \quad (3.53)$$

où N_1 et L_1 sont des constantes qui dépendent du terme de masse considéré.

La fonction μ_1 est pour sa part obtenue en résolvant l'équation de Bianchi (3.9) qui s'écrit, dans la limite (3.52)

$$\frac{\lambda_1}{R^2} - \frac{\nu'_1}{2R} = L_Q(\mu_0, \mu_1),$$

où L_Q correspond aux termes linéaires en μ_0 et μ_1 (produit croisé) du développement de $Q(\mu_0 + \mu_1)$. On peut alors montrer que la fonction μ_1 se développe selon

$$\mu_1 = (mR)^2 \left[M_1 + \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{R_S}{R}}\right) \right], \quad (3.54)$$

où M_1 est une constante.

Pour le potentiel d'AGS (2.43), le calcul explicite des coefficients L_i , N_i et M_i mène au développement

$$\nu = -\frac{R_S}{R} + \frac{2\sqrt{2}}{9} (mR)^2 \sqrt{\frac{R_S}{R}} + \dots, \quad (3.55)$$

$$\lambda = \frac{R_S}{R} - \frac{\sqrt{2}}{3} (mR)^2 \sqrt{\frac{R_S}{R}} + \dots, \quad (3.56)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{8R_S}{9R}} + \frac{6}{31} (mR)^2 + \dots. \quad (3.57)$$

Le développement (3.43) n'a de sens que si l'ordre 1 est plus petit que l'ordre 0, l'ordre 2 plus petit que l'ordre 1, etc. En particulier, si l'on compare les termes dominants des solutions d'ordre 0 (Eq. (3.44) et Eq. (3.49)) et d'ordre 1 (Eq. (3.53) et Eq. (3.54)), on arrive à la conclusion que le développement en puissance de m^2 n'est valable que si $R \lesssim R_V \equiv (m^{-4}R_S)^{1/5}$. On retrouve le résultat que nous avons annoncé à la section 2.3.3 : il est possible de trouver une solution (pour certains potentiels, du moins) de la gravité massive sous la forme d'une série en puissance de m^2 , et ce développement est valable à petites distances jusqu'au rayon de Vainshtein.

3.3.3 Une classe de solutions autre que celle de Vainshtein

Enfin, nous voudrions mentionner le fait qu'il existe un autre développement possible que celui proposé par Vainshtein. Alors que ce dernier est basé sur la solution (3.49) qui est telle que le terme quadratique Q de l'équation (3.48) compense exactement le terme de source $\frac{R_S}{2R^3}$, il est en effet possible de rechercher une solution dont le terme dominant soit un mode zéro de l'opérateur Q . Pour les potentiels BD (2.42) et AGS (2.43), le mode zéro dominant s'écrit $\mu_Q \propto R^{-2}$, et il est possible de trouver une solution à partir de ce mode zéro, sous la forme

$$\mu_0 = (mR_S)^{2/5} \left(A_0 \left(\frac{R_V}{R} \right)^2 - \frac{s}{3A_0} \frac{R}{R_V} \log(R/R_V) \right) + \mathcal{O} \left(\frac{R}{R_V} \right), \quad (3.58)$$

où $s = -1$ pour le potentiel BD (2.42) et $s = +1$ pour le potentiel AGS (2.43), et A_0 est une constante. Ces solutions, que nous appellerons *solutions de type Q*, peuvent exister y compris lorsque la solution de Vainshtein n'est pas présente. En fait, on s'aperçoit numériquement que cette solution est beaucoup plus générale que la solution de Vainshtein, qui requiert un ajustement très fin des conditions aux bords.

Nous avons donc pu montrer l'existence de solutions à symétrie sphérique de la gravité massive sous forme de développement en séries, valables loin de la source pour le développement (3.18), et au voisinage de la source pour le développement (3.43). Il convient alors de se demander s'il est possible de trouver une solution globale à symétrie sphérique, qui ferait le lien entre ces deux régimes. C'est vers cette question que nous nous tournons maintenant.

3.4 L'existence d'une solution globale en débat

L'existence d'une solution globale de la gravité massive est une question débattue depuis longtemps. Déjà, en 1972, alors que Vainshtein venait de proposer dans [269] de rechercher une solution sous forme de série⁶ en puissances de m , Boulware et Deser mettaient en doute dans leur article [49] la possibilité d'obtenir, à partir de ce développement, une solution asymptotiquement plate.

Plus récemment, l'article [96] a permis de confirmer pour la première fois la validité du mécanisme de Vainshtein, dans un contexte toutefois différent de celui des solutions

⁶Il s'agit du développement en série que nous avons présenté à la section 3.3.

à symétrie sphérique de la gravité massive. Plus précisément, C. Deffayet, G. Dvali, G. Gabadadze et A. Vainshtein ont montré dans cet article qu'un mécanisme similaire au mécanisme de Vainshtein en gravité massive existait pour des solutions cosmologiques du modèle DGP⁷. Ces solutions adoptent deux comportements très différents, selon la densité d'énergie de l'univers. Lorsque la densité de matière dans l'univers est faible, un degré de liberté supplémentaire peut se propager en plus des deux polarisations du graviton, exactement de la même façon qu'en gravité massive le mode scalaire du graviton, responsable de la discontinuité de vDVZ, peut se propager en régime linéaire : la gravité diffère alors fortement de la RG, comme la gravité massive diffère de la RG dans le régime linéaire. À l'inverse, lorsque la densité de matière est élevée, ce qui est le cas aux temps cosmologiques primordiaux, ces solutions sont très proches de leur équivalent en RG, mettant ainsi en évidence l'existence d'un mécanisme de Vainshtein qui "écran" le scalaire dans le régime non-linéaire. L'étude par N. Kaloper des solutions du modèle DGP sous forme d'ondes de choc gravitationnelles [167] a également mené à des résultats cohérents avec le mécanisme de Vainshtein : les solutions trouvées sont similaires à leurs équivalents quadri-dimensionnels à courtes distances.

La première étude numérique de la question de l'existence d'une solution globale de la gravité massive a été proposée en 2003 par Damour, Kogan et Papazoglou dans leur article [85]. Dans cet article, ces auteurs ont expliqué ne pas avoir réussi à trouver de solution numérique globale de la gravité massive, et ce malgré l'utilisation de plusieurs termes de masse différents et de plusieurs jauges, et une étude systématique des conditions initiales à imposer.

Au cours du travail de thèse présenté dans ce mémoire, C. Deffayet, E. Babichev et moi-même (RZ) avons réexaminé cette question, et sommes arrivés à des résultats opposés à ceux de Damour *et al.* [85]. Nous avons pu en effet montrer, pour la première fois, l'existence de solutions à symétrie sphérique asymptotiquement plates en gravité massive, à la fois dans la limite de découplage [30] et dans le cas de la théorie complète où toutes les non-linéarités sont prises en compte [28, 29]. Nous présenterons ces résultats aux Chapitres 4 et 5 ; pour l'instant, nous voudrions dans les quelques lignes qui suivent donner un aperçu des difficultés numériques qui doivent être dépassées afin d'obtenir une solution globale. Nous verrons alors que ces difficultés numériques peuvent peut-être expliquer la différence entre les résultats négatifs de l'article [85], et les résultats que nous avons présentés dans [28, 29, 30] qui montrent l'existence d'une telle solution.

3.4.1 Conditions aux bords et approches numériques

En premier lieu, il est nécessaire de définir clairement les conditions aux bords que doivent satisfaire les solutions que l'on recherche. Nous distinguerons deux concepts légèrement différents : d'une part, les conditions aux bords en $R = 0$ et en $R = \infty$ que toute solution doit satisfaire pour être viable physiquement – on pourra appeler ces conditions *conditions physiques* – et d'autre part les *conditions numériques* qu'il faut imposer pour être capable de résoudre numériquement le système d'équations (3.5), (3.6) et (3.9).

La forme que doivent prendre les conditions aux bords mathématiques dépend de la méthode numérique utilisée. Dans le cas d'une intégration directe à la Runge-Kutta, il

⁷Nous renvoyons le lecteur à la section 2.1.2 de ce mémoire, et plus précisément à la p. 44, pour une présentation du modèle DGP.

s'agira de conditions initiales à imposer au point de départ de l'intégration. Dans le cas d'une méthode par relaxation, les conditions aux bords peuvent être mixtes, à la fois à l'origine et loin de la source. Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur les conditions initiales à imposer dans le cadre d'une intégration directe *à la* Runge-Kutta, car c'est le type de résolution numérique qui a été utilisé par Damour *et al.* dans [85]. Notons néanmoins dès à présent qu'une approche par relaxation est en fait plus adaptée à la résolution du système d'équations (3.5), (3.6) et (3.9) ; nous avons pour notre part utilisé les deux types de résolution numérique, menant aux résultats qui seront présentés aux Chapitres 4 et 5. Nous invitons le lecteur intéressé à consulter l'annexe D pour plus de détails sur le principe de ces différentes méthodes numériques et sur leur implémentation pratique.

Dans les paragraphes ci-dessous, nous allons détailler les conditions physiques à imposer en $R = 0$ et en $R = \infty$. Nous présenterons ensuite les conditions initiales qui peuvent être utilisées dans le cadre d'une intégration directe *à la* Runge-Kutta, en partant soit de l'origine, soit de l'infini.

Conditions physiques en $R = \infty$

Les conditions à l'infini sont assez simples : nous voulons que la métrique physique soit asymptotiquement plate, ainsi que la métrique de fond⁸ ; ces conditions s'écrivent

$$\begin{aligned}\lim_{R \rightarrow \infty} \nu(R) &= 0, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \lambda(R) &= 0, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \mu(R) &= 0,\end{aligned}\tag{3.59}$$

auxquelles s'ajoute la condition d'absence de pression hors de la source

$$P(R > R_\odot) = 0.\tag{3.60}$$

Les conditions (3.59) impliquent que le régime linéaire soit valide, au moins au voisinage de $R = +\infty$. Nous savons en fait que ce régime est valide jusqu'à R_V . D'un point de vue numérique, il n'est généralement pas possible d'atteindre $R = +\infty$; par conséquent, on remplacera les conditions ci-dessus par les conditions linéaires (3.21), c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\nu(R) &\sim \nu_\infty(R) \equiv -\frac{4C}{3R} e^{-mR}, \\ \lambda(R) &\sim \lambda_\infty(R) \equiv \frac{2C}{3R} (1 + mR) e^{-mR}, \\ \mu(R) &\sim \mu_\infty(R) \equiv \frac{2C}{3(mR)^2 R} (1 + mR + (mR)^2) e^{-mR}, \text{ lorsque } R \rightarrow \infty,\end{aligned}\tag{3.61}$$

où C est une constante d'ordre 1, qu'il faut choisir de telle façon que la solution obtenue soit régulière partout, et notamment au sein de la source.

⁸La métrique de fond n'étant pas observable, on peut se demander s'il est nécessaire d'imposer que $f_{\mu\nu}$ tende vers la métrique plate en coordonnées sphériques. Cependant, le graviton étant défini au travers de $h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - f_{\mu\nu}$, il est naturel de considérer que l'amplitude du graviton, c'est-à-dire l'excitation du champ gravitationnel, tende vers zéro à l'infini. Cela impose donc que $f_{\mu\nu}$ tende vers la métrique plate exprimée dans les coordonnées sphériques usuelles, c'est-à-dire que $\mu \rightarrow 0$.

Conditions physiques en $R = 0$

En présence d'une source étendue de rayon $R_\odot > R_S$, toute solution physique doit être telle que les invariants de courbure restent finis en $R = 0$. Cette condition peut se traduire par le fait qu'il ne doit pas y avoir de singularité conique à l'origine ; pour cela, il faut imposer

$$\lambda(R = 0) = 0. \quad (3.62)$$

Condition supplémentaire en $R = 0$

Nous imposerons parfois aux solutions recherchées la condition supplémentaire

$$\mu'(R = 0) = 0. \quad (3.63)$$

Cette condition n'est pas indispensable d'un point de vue physique, mais peut se révéler pratique d'un point de vue numérique, car elle permet d'éviter que certains termes des équations du mouvement ne divergent au voisinage de l'origine ; en effet, lorsque l'on étudie attentivement la forme des fonctions f_g (par exemple dans le cas de BD (3.11) et AGS (3.12)), on s'aperçoit que l'identité de Bianchi (3.9) contient des termes de la forme $\mu'' + \mu'/R$; si l'on veut que ces termes μ'/R restent finis⁹, il est nécessaire d'imposer la condition (3.63). En pratique, nous imposerons donc souvent cette condition, tout en gardant à l'esprit que procéder de la sorte restreint l'espace des solutions considérées. Ceci dit, nous verrons qu'il nous sera possible de trouver une solution numérique satisfaisant cette condition (cf. [28] et Chapitre 5) ; on peut donc considérer qu'imposer *à la main* cette condition ne remet pas en cause notre approche numérique.

Conditions mathématiques imposées aux bords

Il ne reste plus qu'à choisir parmi les conditions évoquées plus haut un sous-ensemble de conditions telles que la valeur de toutes les fonctions soit fixée au moins en un point.

Si nous choisissons d'intégrer à la Runge-Kutta le système en partant de l'infini (en pratique d'une distance $R_\infty > R_V$), il est naturel d'imposer

$$\begin{aligned} \lambda(R_\infty) &= \lambda_\infty(R_\infty), \\ \nu(R_\infty) &= \nu_\infty(R_\infty), \\ \mu(R_\infty) &= \mu_\infty(R_\infty), \\ \mu'(R_\infty) &= \mu'_\infty(R_\infty), \\ P(R_\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Les fonctions λ_∞ , ν_∞ et μ_∞ définies au travers du système (3.61) dépendent d'une constante C , qu'il s'agit de déterminer. Pour ce faire, on choisit au hasard une valeur de cette constante, puis on procède à l'intégration numérique du système d'équations (3.5), (3.6) et (3.9). Si l'intégration n'est pas satisfaisante (par exemple si une singularité est rencontrée, ou si le scalaire de courbure diverge à l'origine), on modifie un peu la constante C et on

⁹Il est important de noter que d'un point de vue physique, il n'est pas nécessaire que ces termes restent finis, car des compensations peuvent avoir lieu entre divers termes divergents, de telle sorte que l'ensemble reste fini.

réitère l'opération, jusqu'à ce que la solution obtenue satisfasse les critères de régularité et de précision désirés¹⁰.

Toutefois, nous avons vu à la section 3.2.3 que pour certains termes de masse (comme le terme AGS de l'équation (2.43)), la solution n'est pas fixée d'une façon unique par le comportement à l'infini. Il est donc clair que dans ces cas-là, les conditions (3.64) ne sont pas suffisantes pour explorer toutes les solutions possibles. En pratique, nous utiliserons plutôt

$$\begin{aligned}\lambda(R_\infty) &= (1 + \alpha_\lambda) \lambda_\infty(R_\infty), \\ \nu(R_\infty) &= (1 + \alpha_\nu) \nu_\infty(R_\infty), \\ \mu(R_\infty) &= (1 + \alpha_\mu) \mu_\infty(R_\infty), \\ \mu'(R_\infty) &= (1 + \alpha_{\mu'}) \mu'_\infty(R_\infty), \\ P(R_\infty) &= 0.\end{aligned}\tag{3.65}$$

où les α_i sont des petits paramètres qui peuvent être ajustés par l'utilisateur (plus de détails sur ces considérations numériques sont donnés à l'Annexe D).

On peut également décider d'intégrer à la Runge-Kutta le système d'équations (3.5), (3.6) et (3.9) en partant de l'origine. Dans ce cas, les conditions initiales prennent la forme

$$\begin{aligned}\lambda(R_0) &= 0, \\ \nu(R_0) &= A, \\ \mu(R_0) &= B, \\ \mu'(R_0) &= C, \\ P(R_0) &= D,\end{aligned}\tag{3.66}$$

où R_0 est le point de départ, idéalement situé exactement à l'origine ou au moins à son voisinage, et où les constantes A, B, C, D doivent être ajustées de façon à réussir à intégrer jusqu'à une distance jugée suffisante (typiquement jusqu'à $R \sim 3R_V$). Ces constantes doivent également être choisies de telle sorte que la pression s'annule exactement à la surface de l'étoile, en $R = R_\odot$. Afin de ne pas avoir à ajuster la constante D en fonction du rayon de l'étoile, on peut accepter que le rayon de l'étoile ne soit pas fixé en avance mais d'une façon dynamique, au point où la pression s'annule. La constante D peut alors être choisie arbitrairement, ce qui permet de n'avoir que trois paramètres à déterminer. On peut aller encore plus loin et décider d'imposer la condition (3.63), ce qui revient à fixer $C = 0$; cela permet d'avoir encore une constante en moins à déterminer, tout en sachant que cela risque de trop restreindre la classe de solutions étudiées. Dans tous les cas (c'est-à-dire même en fixant dynamiquement le rayon de l'étoile et en posant $C = 0$), il reste un espace de paramètres (A, B) à deux dimensions à explorer, ce qui rend une telle intégration difficile.

¹⁰Nous verrons à la Section 4.1.1, et en particulier à l'équation (4.16), que l'étude des solutions à symétrie sphérique dans la limite de découplage nous permet de fixer la valeur de cette constante à $C = 1$. Pour l'instant néanmoins, nous considérerons cette constante comme n'étant pas fixée par la théorie, et devant donc être déterminée numériquement.

Nous voyons tout de suite les difficultés qui accompagnent les deux types de conditions initiales (3.64) et (3.66) : les conditions (3.64) ne sont pas suffisantes pour fixer la solution sans ambiguïté pour certains potentiels, tandis que les conditions (3.66) nécessitent d'ajuster au moins deux constantes, ce qui est une tâche pour le moins ardue. Cependant, les difficultés liées aux conditions initiales sont loin d'être les seuls points délicats de la résolution numérique du système d'équations (3.5), (3.6) et (3.9), comme nous allons l'expliquer dans la section qui suit.

3.4.2 Solutions singulières... ou instabilité numérique ?

Une fois fixées les conditions initiales, soit à l'origine, soit loin de la source, il s'agit de résoudre le système d'équations (3.5), (3.6) et (3.9) proprement dit. Dans l'article [85], Damour, Kogan et Papazoglou présentent les résultats de leurs intégrations des équations de la gravité massive, de l'origine vers l'extérieur d'une part, et de "l'infini" (c'est-à-dire d'une distance $\gg m^{-1}$ en pratique) vers l'origine d'autre part. Ces conclusions sont négatives : dans tous les cas une singularité est rencontrée à une distance finie du point de départ. Ces singularités ont lieu à un rayon qui dépend du terme de masse et du point de départ de l'intégration, mais situé dans tous les cas entre un rayon de l'ordre de $R_p \equiv (m^{-2}R_S)^{1/3}$ et la longueur de Compton du graviton m^{-1} [85]. Notons que $R_S \ll R_p \ll R_V$ et $m^{-1} \gg R_V$, c'est à dire que la singularité se trouve environ aux alentours du rayon de Vainshtein.

Afin de mieux comprendre la nature de ces singularités, nous avons procédé à des intégrations numériques similaires à celle de [85], en partant de l'infini (en pratique d'une distance $R_\infty \gg R_V$). Nous avons travaillé dans la jauge (3.3) et concentré nos efforts sur les potentiels BD (2.42) et AGS (2.43).

Dans le cas du potentiel de BD, l'intégration entre $R_i \gg R_V$ et le rayon R_{sing} défini par

$$R_{sing} \equiv (R_S^2 m^{-3})^{1/5} \quad (3.67)$$

ne pose aucun problème. Par contre, aux alentours de R_{sing} , la solution diverge systématiquement, et il n'est pas possible d'améliorer la situation en modifiant un petit peu les conditions initiales en R_∞ . La singularité rencontrée dans ce cas-là est à notre sens une "vraie" singularité : nous verrons à la section 5.1.1 que l'échelle R_{sing} correspond précisément à l'échelle à laquelle les non-linéarités qui ne sont pas prises en compte dans la limite de découplage¹¹ commencent à jouer un rôle. Il n'est donc pas surprenant de rencontrer une difficulté à cette échelle.

Dans le cas du potentiel AGS, nos premières investigations (2.43) se sont révélées difficiles. Lors de nos tentatives d'intégration numérique du système d'équations (3.5), (3.6) et (3.9), la solution divergeait immédiatement après le début de l'intégration. Dans un premier temps, cette difficulté à intégrer les équations du mouvement dans le cas du potentiel AGS nous a convaincu qu'aucune solution physique ne pouvait être trouvée pour ce terme de masse. Nous avons également essayé d'intégrer les équations du mouvement pour le terme AGS dans la limite de découplage (cf. Chapitre 4), sans plus de succès. C'est alors

¹¹On peut penser par exemple aux termes d'interactions de la forme $(\Box\phi)^4$, qui ne sont pas retenus dans la limite de découplage.

que nous nous sommes rendus compte que la situation était complètement différente dès lors que l'on utilisait une approche par relaxation. En effet, cette méthode nous a permis d'identifier une solution dans la limite de découplage, puis de confirmer sa validité par une approche *à la* Runge-Kutta. Il s'est alors révélé possible de la généraliser à la théorie complète !

Nous allons dans les chapitres qui suivent présenter la démarche qui nous a mené à une telle solution, et détailler les méthodes analytiques et numériques permettant de pouvoir *in fine* intégrer à la Runge-Kutta les équations du mouvement dans le cas AGS. Pour l'instant, contentons-nous de signaler deux caractéristiques des équations dans le cas d'AGS qui rendent leur intégration particulièrement difficile. Tout d'abord, toute solution de ces équations est extrêmement instable. Cela peut être vu en résolvant les équations du mouvement pour une perturbation autour de la solution linéarisée (3.21) ; un tel calcul est présenté dans l'Annexe C, à la section C.2 dans la limite de découplage, et à la section C.3 dans le cas général. On peut alors se rendre compte que toute perturbation de la solution explose exponentiellement vite ; d'un point de vue numérique, cela signifie que les conditions initiales doivent être déterminées avec une précision extrêmement fine (nous verrons à l'Annexe D que la précision relative nécessaire est au moins de l'ordre de 10^{-8}). Cette instabilité numérique nous amène au deuxième point délicat : les conditions initiales (3.64) ne sont pas suffisamment précises. Nous savons en effet que dans le cas AGS, ces conditions initiales ne fixent pas la solution d'une manière unique ; de plus, la précision de l'ordre linéaire n'est pas suffisante. On peut alors utiliser le développement en série (3.18) pour améliorer la précision, tout en se rappelant que ce développement n'est probablement qu'un développement asymptotique, qui n'est pas convergent. En pratique, on peut également utiliser les résultats numériques obtenus par relaxation pour fixer les conditions initiales en R_∞ . En combinant toutes ces méthodes, on peut alors intégrer les équations, depuis un point situé à l'extérieur du rayon de Vainshtein jusqu'au cœur de l'étoile.

À l'issue de ce chapitre introductif consacré aux solutions à symétrie sphérique de la gravité massive, nous espérons avoir convaincu le lecteur qu'il était fort difficile de rechercher une telle solution sans avoir à notre disposition une meilleure compréhension théorique du problème considéré. La complexité des équations à résoudre, ainsi que les subtilités liées à l'existence, la convergence et à l'unicité de solutions sous forme de séries — sans compter les difficultés numériques mentionnées ci-dessus — nous encouragent à essayer de simplifier le problème, de façon à mieux en saisir les éléments essentiels. C'est exactement l'enjeu du prochain chapitre dans lequel nous étudierons les solutions à symétrie sphérique de la gravité massive *dans la limite de découplage*. Cette limite nous permettra en effet de simplifier considérablement les équations du mouvement et nous donnera l'opportunité de mieux comprendre certains points difficiles, ouvrant ainsi la voie à l'identification de solutions à symétrie sphérique dans le cadre de la théorie complète où toutes les non-linéarités sont prises en compte.

Chapitre 4

Les solutions à symétrie sphérique de la gravité massive dans la limite de découplage

Sommaire

4.1	Présentation du travail et résultats	94
4.1.1	Redéfinition des variables et équations du mouvement	94
4.1.2	Comparaison avec le formalisme de Goldstone	97
4.1.3	Solution sous forme de série à grandes distances	97
4.1.4	Solution sous forme de série à petites distances	98
4.1.5	Solution sous forme de série à l'intérieur de la source	99
4.1.6	Méthodes et résultats numériques	100
4.2	The Vainshtein mechanism in the decoupling limit of massive gravity (article)	102
4.2.1	Introduction	105
4.2.2	Massive gravity and the Goldstone picture	107
4.2.3	Static spherically symmetric solutions	113
4.2.4	The decoupling limit in spherically symmetric solutions	123
4.2.5	Discussion and conclusions	143
4.2.6	Appendices and References	144

Ce chapitre est consacré à l'étude des solutions à symétrie sphérique de la gravité massive (GM), dans la limite de découplage (LD). Nous avons présenté au chapitre précédent les difficultés liées à la résolution des équations du mouvement dans le cas de la théorie complète, où toutes les non-linéarités sont incluses. En particulier, nous avons vu que la résolution numérique des équations de la GM, même dans le cas le plus simple des solutions à symétrie sphérique, est un problème ardu : la théorie étant hautement non-linéaire, il est souvent difficile de faire la distinction entre de vraies singularités de la théorie et des singularités causées par des instabilités numériques. Il semble donc intéressant de se pencher, dans un premier temps, sur un problème simplifié qui est celui de l'existence de

solutions à symétrie sphérique de la gravité massive dans la limite de découplage.

C'est précisément la démarche que nous avons suivie, E. Babichev, C. Deffayet et moi-même (RZ), dans l'article [30], publié en 2009 dans le *Journal of High Energy Physics (JHEP)*. Nous reproduisons ci-dessous le texte intégral (en anglais) de cet article intitulé "*The Vainshtein mechanism in the Decoupling Limit of massive gravity*". Avant le texte de l'article proprement dit, nous donnons (en français) un résumé des principaux résultats qui y sont exposés.

4.1 Présentation du travail et résultats

Dans ce préambule à l'article [30], nous montrerons tout d'abord comment la LD peut être prise directement dans les équations du mouvement à symétrie sphérique, une fois les variables convenablement renormalisées. Nous mettrons ensuite en évidence le lien entre le mode scalaire ϕ du boson de Goldstone et la fonction μ qui est utilisée dans l'ansatz à symétrie sphérique (2.68) de la métrique $f_{\mu\nu}$. Une fois les équations obtenues dans la LD, nous décrirons les méthodes analytiques (développements en séries) et numériques que nous avons développées pour résoudre ces équations. Le principal résultat de ces travaux est qu'il existe bien des solutions globales de la gravité massive dans la limite de découplage. Nous présenterons brièvement ces solutions et montrerons qu'elles interpolent entre un régime de gravité modifié à grande distance et un régime très proche de la Relativité Générale (RG) à petites distances.

4.1.1 Redéfinition des variables et équations du mouvement

Nous souhaitons prendre la limite de découplage (2.102)

$$\begin{aligned} M_P &\rightarrow \infty, \\ m &\rightarrow 0, \\ \Lambda &\sim \text{constante}, \\ T_{\mu\nu}/M_P &\sim \text{constante}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

dans les équations du mouvement (3.5), (3.6) et (3.9). Cependant, il est clair qu'il n'est pas possible de prendre cette limite sans préalablement redéfinir les variables¹. En s'inspirant des redéfinitions (2.99), on peut se rendre compte (*cf.* [30], Eq. (4.1)) qu'une redéfinition des variables adaptée à la LD s'écrit

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\nu} &\equiv M_P \nu, \\ \tilde{\lambda} &\equiv M_P \lambda, \\ \tilde{\mu} &\equiv m^2 M_P \mu, \end{aligned} \right| \begin{aligned} \tilde{\rho} &\equiv \rho/M_P, \\ \tilde{P} &\equiv P/M_P. \end{aligned} \tag{4.2}$$

¹En effet, cela reviendrait à annuler le terme de masse ainsi que le terme de source dans les équations d'Einstein (3.6), ce qui ne présente que peu d'intérêt. Une autre façon de se rendre compte de la nécessité de redéfinir les variables est de considérer la solution linéarisée (3.61), qui est telle que $\lambda \sim \nu \sim R_S/R$ dans le régime $R \ll m^{-1}$; en utilisant le fait que $R_S = 2GM \sim (M/M_P) \times (1/M_P)$, on voit que prendre directement la limite de découplage mène à $\lambda, \nu \rightarrow 0$, alors que cette limite devrait garder ce terme linéarisé fixe. Par contre, on voit tout de suite qu'après la redéfinition (4.2), la LD préserve le terme linéarisé.

Décrivons brièvement l'effet de la LD sur les différentes équations du mouvement. L'équation de conservation s'écrit (*cf.* [30], Eq. (4.3))

$$\tilde{P}' = -\frac{\tilde{\nu}'}{2M_P}(\tilde{\rho} + \tilde{P}) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad M_P \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

La pression de la source s'annule donc dans cette limite. En ce qui concerne les équations d'Einstein (3.6), la LD revient à linéariser le tenseur d'Einstein et à ne garder du terme de masse que les termes linéaires en $\tilde{\mu}$ (*cf.* [30], Eq. (4.2)), ce qui mène à

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\lambda}'}{R} + \frac{\tilde{\lambda}}{R^2} &= -\frac{1}{2}(3\tilde{\mu} + R\tilde{\mu}') + \tilde{\rho}, \\ \frac{\tilde{\nu}'}{R} - \frac{\tilde{\lambda}}{R^2} &= \tilde{\mu}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Enfin, prendre la LD dans l'identité de Bianchi (3.9) consiste à ne garder que les termes linéaires en $\tilde{\lambda}, \tilde{\nu}$, et le terme quadratique en $\tilde{\mu}$, tout comme nous l'avons fait à l'équation (3.47). On obtient alors

$$\frac{\tilde{\lambda}}{R^2} = \frac{\tilde{\nu}'}{2R} + \frac{Q(\tilde{\mu})}{\Lambda^5}, \quad (4.5)$$

où l'opérateur quadratique Q a été défini à l'équation (3.46). Le changement de variables (4.2) permet donc d'obtenir les équations à résoudre dans la LD ; néanmoins, il présente le défaut de remplacer des variables sans dimension par des variables dimensionnées, ce qui n'est pas idéal d'un point de vue numérique. Afin de travailler avec des variables sans dimension, on peut définir (*cf.* [30], p. 22)

$$\left. \begin{aligned} \xi &\equiv R/R_V \\ \rho_a &\equiv 4\pi \frac{R_V^3}{M} \rho \end{aligned} \right| \quad \begin{aligned} w(\xi) &\equiv a^{-2} \mu \\ v(\xi) &\equiv a^{-4} \nu \\ u(\xi) &\equiv a^{-4} \lambda, \end{aligned} \quad (4.6)$$

où nous avons introduit le paramètre sans dimension

$$a \equiv R_V m = (R_S m)^{1/5}. \quad (4.7)$$

La longueur de Compton m^{-1} du graviton étant supposée d'ordre cosmologique tandis que R_S est d'ordre astrophysique, le paramètre a est toujours petit pour des objets astrophysiques réalistes. Pour le Soleil, on a ainsi $a \simeq 10^{-5}$; nous supposerons dans la suite $a \ll 1$. Il est donc naturel de chercher une solution des équations de la gravité massive sous forme de séries en puissances de a , ou pour être plus précis, en puissance de a^2 . La limite de découplage revient alors à ne conserver que les termes d'ordre le plus bas en puissances du paramètre a^2 . Ainsi, les équations (4.4) et (4.5) prennent la forme

$$\begin{aligned} \frac{\dot{u}}{\xi} + \frac{u}{\xi^2} &= -\frac{1}{2}(3w + \xi \dot{w}) + \rho_a, \\ \frac{\dot{v}}{\xi} - \frac{u}{\xi^2} &= w, \\ \frac{u}{\xi^2} &= \frac{\dot{v}}{2\xi} + Q(w), \end{aligned} \quad (4.8)$$

où $\dot{} \equiv \frac{d}{d\xi}$. On peut combiner ces équations et obtenir après intégration (cf. [30], Eq. (4.4)-(4.6) et Eq. (4.10)), à l'extérieur de la source, une équation qui ne dépend que de w :

$$2Q(w) + \frac{3}{2}w = \frac{c_0}{\xi^3}, \quad (4.9)$$

où c_0 est une constante d'intégration et

$$Q(w) = -\frac{1}{2} \left\{ 3\alpha \left(\frac{\xi}{2} \dot{w}\ddot{w} + \frac{3}{2} w\ddot{w} + 2\dot{w}^2 + \frac{6w\dot{w}}{\xi} \right) + \beta \left(\frac{3\xi}{2} \dot{w}\ddot{w} + \frac{5}{2} w\ddot{w} + 5\dot{w}^2 + \frac{10w\dot{w}}{\xi} \right) \right\}. \quad (4.10)$$

Dans le cas des termes de masse de BD (2.42) et d'AGS (2.43), l'opérateur Q prend la forme

$$Q(w) = -s \left(\frac{\dot{w}^2}{4} + \frac{w\ddot{w}}{3} + 2\frac{w\dot{w}}{\xi} \right), \quad (4.11)$$

où $s = -1$ pour le potentiel de BD et $s = 1$ dans le cas AGS.

À petites distances, c'est-à-dire à l'intérieur du rayon de Vainhstein, le terme non-linéaire domine :

$$2Q \sim \frac{c_0}{\xi^3}. \quad (4.12)$$

D'autre part, nous aimerions retrouver la RG (linéarisée) à petites distances, ce qui se traduit par

$$\begin{aligned} u(\xi) &\sim \frac{1}{\xi}, \\ v(\xi) &\sim -\frac{1}{\xi} \quad \text{lorsque } \xi \ll 1. \end{aligned} \quad (4.13)$$

En utilisant l'équation de Bianchi, à savoir la troisième équation du système (4.8), on obtient dans ce cas

$$Q(w) \sim \frac{1}{2\xi^3}. \quad (4.14)$$

En comparant les équations (4.12) et (4.14), on voit que la constante c_0 doit être choisie égale à 1 de façon à retrouver la RG au voisinage de la source. Dorénavant, on supposera cette condition respectée. Remarquons qu'à grandes distances la fonction w est telle que $w \ll 1$; on peut alors ne garder que la partie linéaire de l'équation (4.9), et obtenir

$$w(\xi) \sim \frac{2c_0}{3\xi^3} = \frac{2}{3\xi^3}. \quad (4.15)$$

En comparant ce comportement asymptotique de w à grandes distances et le comportement asymptotique dans le régime $R_V \ll R \ll m^{-1}$ de la solution (3.61) du système de la gravité massive linéarisée (3.20), on voit que la constante d'intégration C qui doit être fixée dans la solution (3.61) correspond exactement à la constante c_0 . On vient donc de découvrir un premier avantage de l'étude de la gravité massive dans la LD : cette limite nous permet de fixer à

$$C = 1 \quad (4.16)$$

la constante d'intégration C de la solution linéarisée à grandes distances de façon à retrouver la RG à courtes distances. Cette limite nous a permis de plus de simplifier le système d'équations (3.5), (3.6) et (3.9) de la gravité massive en une seule équation pour la variable w , qui prend la forme

$$2 Q(w) + \frac{3}{2}w = \frac{1}{\xi^3}, \quad (4.17)$$

à l'extérieur de la source. À l'intérieur de la source, que l'on supposera pour des raisons de simplicité à densité constante

$$\rho_a = \frac{3}{\xi_\odot^3}, \quad (4.18)$$

un calcul similaire permet de montrer que l'équation pour w s'écrit

$$2 Q(w) + \frac{3}{2}w = \frac{1}{\xi_\odot^3}. \quad (4.19)$$

4.1.2 Comparaison avec le formalisme de Goldstone

Nous avons vu à la section 3.1.1 que la fonction μ était associée au changement de coordonnées entre la jauge unitaire (3.1) et la jauge de Schwarzschild (3.3), au travers du changement de coordonnée radiale (3.4) qui s'écrit $Re^{-\mu(R)/2} = r$. D'autre part, nous avons vu à la section 2.4 que les champs de Goldstone π^A étaient précisément introduits pour “mesurer” la déviation à la jauge unitaire. Dans le cas de la transformation (3.4), il est montré dans la Section 4.1.2 de [30] que seule la composante scalaire ϕ de π^A est nécessaire, et qu'elle est en effet reliée à la fonction μ par

$$\phi' \equiv \partial_R \phi = -R \left(1 - e^{-\frac{\mu(R)}{2}} \right) \sim -\frac{R\mu}{2} + \frac{R\mu^2}{8} + \dots$$

Si nous utilisons les variables renormalisées $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\mu}$, définies respectivement aux équations (2.99) et (4.2), puis prenons la limite de découplage (4.1), nous obtenons la relation simplifiée

$$\tilde{\mu} = -\frac{2}{R}\tilde{\phi}'. \quad (4.20)$$

On peut alors montrer (cf. [30], Section 4.1.2) que l'équation du mouvement pour $\tilde{\phi}$ dans la LD est exactement équivalente à l'équation pour $\tilde{\mu}$ dans cette même limite, et donc aux équations (4.17) et (4.19) pour la fonction w .

4.1.3 Solution sous forme de série à grandes distances

On veut à présent chercher une solution sous forme de série de l'équation (4.17) à grandes distances. Dans ce régime, la fonction w doit tendre vers

$$w(\xi) \sim w_\infty \equiv \frac{2}{3\xi^3} \quad \text{lorsque } \xi \rightarrow \infty. \quad (4.21)$$

À partir de ce comportement asymptotique, il est possible de trouver une solution sous la forme (cf. [30], Eq. (4.34))

$$w(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_n}{\xi^{3+5n}}. \quad (4.22)$$

On retrouve là le développement (3.41) que l'on avait obtenu en prenant la limite $z \ll 1$ dans le développement en série (3.18) de la solution de la théorie complète. Les deux autres fonctions u et v possèdent un développement semblable

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{\xi^{1+5n}}, \\ v(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{\xi^{1+5n}}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Les développements (4.22) et (4.23) permettent une nouvelle fois de vérifier que le régime linéaire cesse d'être valable à $\xi \sim 1$, c'est-à-dire $R \sim R_V$.

Dans les cas des termes de masse de BD (2.42) et d'AGS (2.43), les six premiers termes de la série de w s'écrivent

$$w(\xi) = \frac{2}{3\xi^3} + s \frac{4}{3\xi^8} + \frac{1024}{27\xi^{13}} + s \frac{712960}{243\xi^{18}} + \frac{104910848}{243\xi^{23}} + s \frac{225030664192}{2187\xi^{28}} + \dots \quad (4.24)$$

où $s = -1$ pour le potentiel de BD et $s = 1$ dans le cas AGS. On peut alors vérifier explicitement que cette série ne converge pas. Il s'agit en fait d'un développement asymptotique de la solution : pour tout ξ_i fixé, il existe un ordre n optimal, qui approche la solution de la meilleure façon possible ; on peut trouver cet ordre en minimisant w_n/ξ_i^{3+5n} . D'un point de vue numérique, il se trouve que les développements (4.22) et (4.23) sont extrêmement précieux lors de l'intégration à la Runge-Kutta vers l'intérieur à partir d'un point situé loin de la source (en pratique $\xi_i \sim 3$), car ils permettent d'améliorer sensiblement la précision des conditions initiales ξ_i .

4.1.4 Solution sous forme de série à petites distances

Tournons-nous maintenant vers ce qui se passe à courtes distances, c'est-à-dire à l'intérieur du rayon de Vainshtein. Nous avons vu à la Section 3.3 que deux types de solutions étaient possibles à courtes distances : la solution de Vainshtein, et les solutions de type Q . Ces deux catégories de solutions sont préservées dans la LD.

Le terme dominant de la solution de Vainshtein est solution de l'équation (4.17) dans laquelle on a négligé le terme linéaire :

$$2Q(w) = \frac{1}{\xi^3}.$$

C'est exactement la même équation que l'équation (3.48) qui nous avait permis de trouver à la Vainshtein le terme dominant de μ au voisinage de la source dans le cadre de la théorie complète. On peut chercher une solution sous forme de puissance de ξ , comme nous l'avons fait à l'équation (3.49), ce qui mène à (cf. [30], Eq. (4.37))

$$w \sim w_V \propto \frac{1}{\sqrt{\xi}}. \quad (4.25)$$

Nous avons vu à la section 3.3 que cette solution n'est pas toujours réelle. Par exemple, pour le potentiel de BD (2.42), la solution est imaginaire et n'est donc pas acceptable

physiquement. Par contre, dans le cas du potentiel AGS (2.43), on peut trouver une solution basée sur le terme dominant de Vainshtein. L'équation pour w étant du second ordre, cette solution dépend de deux constantes d'intégration A_0 et B_0 . Dans le cas où la source est ponctuelle et localisée à l'origine, on peut montrer que l'une des constantes d'intégration doit être fixée à zéro afin d'éviter que le mode associé ne domine au voisinage de l'origine, contredisant alors l'hypothèse de départ qui stipulait que la solution était proche de la solution de Vainshtein. La solution ne dépend donc que d'une seule constante et prend la forme (cf. [30], Eq. (4.38))

$$w(\xi) = \sqrt{\frac{8}{9\xi}} + B_0 \xi^{-\frac{5}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{4}} - \frac{3(-5 + \sqrt{5})}{8\sqrt{2}(-4 + \sqrt{5})} B_0^2 \xi^{-2 + \frac{3\sqrt{5}}{2}} + \frac{6\xi^2}{31} + \dots \quad (4.26)$$

La constante B_0 doit être choisie de telle sorte que la solution ainsi définie à petites distances soit asymptotiquement plate à grandes distances.

Il est possible de trouver un autre type de solutions : les solutions de type Q . Leur comportement dominant w_Q est solution de

$$Q(w) = 0, \quad (4.27)$$

c'est-à-dire que w est un mode zero de l'opérateur Q , ou pour le dire encore autrement, w appartient au noyau de Q . Dans les cas des termes de masse de BD (2.42) et d'AGS (2.43), le mode zéro de Q est dominé à petites distances par

$$w_Q \sim 1/\xi^2. \quad (4.28)$$

Une solution peut alors être trouvée sous la forme

$$\begin{aligned} w(\xi) &= \frac{A_0}{\xi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n w_{n,k} \xi^n (\ln \xi)^k \\ &= \frac{A_0}{\xi^2} + \frac{3A_0 B_0 - s \ln \xi}{3A_0} \xi + s \frac{3}{8} \xi^2 \\ &\quad + \frac{1 + s 6A_0 B_0 - 54A_0^2 B_0^2 - (2 - s 36A_0 B_0) \ln \xi - 6 \ln^2 \xi}{216A_0^3} \xi^4 + O(\xi^5). \end{aligned} \quad (4.29)$$

La valeur des constantes d'intégration A_0 et B_0 peut être déterminée en ajustant ces paramètres de sorte que l'on obtienne le bon comportement asymptotique à grandes distances.

Une analyse de l'existence de la solution de Vainshtein et de la forme des modes zéro de Q dans le cas général (c'est-à-dire pour α et β quelconques) est donnée à la Section 4.2.5 de l'article [30].

4.1.5 Solution sous forme de série à l'intérieur de la source

Enfin, on peut trouver des solutions de l'équation (4.19) au sein de la source, sous forme de séries. Ici encore, deux types de développements sont possibles. Le premier est l'analogue de la solution de Vainshtein et s'écrit

$$w(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{2n} \xi^{2n} = A_0 + s \frac{3A_0 \xi_{\odot}^3 - 2}{20A_0 \xi_{\odot}^3} \xi^2 + \dots \quad (4.30)$$

où le terme dominant est maintenant de la forme $w \sim A_0$ (et $s = -1$ dans le cas de BD, et $s = +1$ pour le terme de masse d'AGS). On peut montrer numériquement (*cf.* [30], Fig. 5) que cette solution à l'intérieur de la source se prolonge en la solution de Vainshtein à l'extérieur.

Le second type de solutions est l'analogue des solutions de type Q (4.29), et prend en fait exactement la même forme

$$w(\xi) = \frac{A_0}{\xi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} w_n \xi^n. \quad (4.31)$$

Nous avons donc présenté les différents comportements asymptotiques que peuvent adopter les solutions des équations (4.17) et (4.19), ainsi que les développements en série correspondants. Nous pouvons à présent décrire les principaux résultats numériques de l'article [30] au sujet de l'existence de solutions globales à symétrie sphérique dans la LD de la GM, dans le cas des potentiels de BD et d'AGS.

4.1.6 Méthodes et résultats numériques

Dans le cas du potentiel de BD, la résolution numérique *à la* Runge-Kutta des équations (4.17) et (4.19) ne pose pas de problème. On montre ainsi (*cf.* [30], Section 4.2) qu'il existe une unique² solution avec le comportement asymptotique (4.21). Cette solution est décrite par les développements (4.29) et (4.31) à l'intérieur du rayon de Vainshtein, et fait donc partie des solutions de type Q . Ces résultats numériques ont été confirmés par une preuve analytique de l'unicité de la solution loin de la source pour le potentiel de BD, proposée par J. Ecalte [114].

Dans le cas du potentiel d'AGS, la situation est plus complexe : il existe une infinité de solutions avec le même comportement asymptotique (4.21). Nous avons déjà mentionné à la Section 3.2.3 qu'imposer le comportement asymptotique à l'infini n'était pas suffisant pour garantir l'unicité de la solution dans le cas AGS, car le problème de Cauchy est singulier en $+\infty$. D'un point de vue numérique, si l'on essaye d'intégrer *à la* Runge-Kutta à partir de $\xi_i \sim 3$ vers l'intérieur en partant exactement des conditions (4.21), on se rend compte que la solution diverge immédiatement, à cause d'instabilités numériques qui explosent exponentiellement (*cf.* Section 3.4.2 et [30], Annexe C), rendant impossible tout intégration. Le comportement asymptotique (4.21) n'est en fait pas suffisamment proche de la vraie solution, et c'est cet écart à la vraie solution qui sert de source aux instabilités numériques. Pour atteindre une précision suffisante qui permette d'intégrer les équations du mouvement (4.17) et (4.19) jusqu'à un point ξ_f situé au voisinage de l'origine, il faut utiliser le développement asymptotique (4.22) comme point de départ, et ajuster très finement (la précision relative nécessaire est de l'ordre de 10^{-7}) la valeur de $\dot{w}(\xi_i)$ et $w(\xi_i)$. Il est alors possible d'intégrer les équations jusqu'à un rayon aussi petit que désiré (en pratique, nous

²Pour plus de détail en ce qui concerne l'unicité de la solution dans la LD, nous renvoyons le lecteur à la section C.2 de l'Annexe C de ce mémoire, en complément de la section 4.2 de l'article [30].

avons pu intégrer jusqu'à $\xi_f = 10^{-5}$ sans difficulté). Il est également possible d'adopter une approche par relaxation, qui permet de résoudre les équations (4.17) et (4.19) sur de très grands intervalles (typiquement, ξ appartenant à $[0; 100]$). Les deux méthodes sont en parfait accord, et permettent de mettre en évidence l'existence d'une infinité de solutions, avec le même comportement asymptotique (4.21).

Parmi les solutions trouvées pour le potentiel AGS, la majorité se révèlent être de type Q , c'est-à-dire qu'elles adoptent un comportement $\propto 1/\xi^2$ à petites distances. Cependant, en ajustant finement les conditions initiales loin de la source, on peut montrer que certaines de ces solutions peuvent tout d'abord adopter le comportement de Vainshtein $\propto 1/\sqrt{\xi}$ entre le rayon de Vainshtein $\xi_V = 1$ et un point $\xi_Q < 1$ où la solution devient de type Q . Ce point ξ_Q peut être rendu arbitrairement petit, jusqu'au cas limite où la solution correspond à la solution de Vainshtein (*cf.* [30], Fig. 3 et 5). La solution de Vainshtein est donc une limite de la classe des solutions de type Q . Notons que pour toutes ces solutions, les comportements dominants à courtes distances des fonctions u et v sont donnés par les équations (4.13), c'est-à-dire par le régime linéaire de la RG, confirmant par là-même l'hypothèse de Vainshtein dans le cadre de la LD.

Nous verrons au Chapitre 5 que ces solutions du modèle AGS dans la LD, et en particulier la solution de Vainshtein que nous avons pu identifier, seront très précieuses pour construire une solution à symétrie sphérique de la théorie où toutes les non-linéarités sont prises en compte.

4.2 The Vainshtein mechanism in the decoupling limit of massive gravity (article)

Nous reproduisons à présent l'article [30] publié en 2009 par E. Babichev, C. Deffayet et moi-même (RZ) dans le *Journal of High Energy Physics (JHEP)* et intitulé “*The Vainshtein mechanism in the decoupling limit of massive gravity*”.



PUBLISHED BY IOP PUBLISHING FOR SISSA

RECEIVED: January 16, 2009

REVISED: March 19, 2009

ACCEPTED: May 5, 2009

PUBLISHED: May 26, 2009

The Vainshtein mechanism in the decoupling limit of massive gravity

E. Babichev, C. Deffayet and R. Ziour

APC,¹

10 rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75205 Paris Cedex 13, France

E-mail: babichev@apc.univ-paris7.fr, deffayet@iap.fr,

ziour@apc.univ-paris7.fr

ABSTRACT: We investigate static spherically symmetric solutions of nonlinear massive gravities. We first identify, in an ansatz appropriate to the study of those solutions, the analog of the decoupling limit (DL) that has been used in the Goldstone picture description. We show that the system of equations left over in the DL has regular solutions featuring a Vainshtein-like recovery of solutions of General Relativity (GR). Hence, the singularities found to arise integrating the full nonlinear system of equations are not present in the DL, despite the fact those singularities are usually thought to be due to a negative energy mode also seen in this limit. Moreover, we show that the scaling conjectured by Vainshtein at small radius is only a limiting case in an infinite family of non singular solutions each showing a Vainshtein recovery of GR solutions below the Vainshtein radius but a different common scaling at small distances. This new scaling is shown to be associated with a zero mode of the nonlinearities left over in the DL. We also show that, in the DL, this scaling allows for a recovery of GR solutions even for potentials where the original Vainshtein mechanism is not working. Our results imply either that the DL misses some important features of nonlinear massive gravities or that important features of the solutions of the full nonlinear theory have been overlooked. They could also have interesting outcomes for the DGP model and related proposals.

KEYWORDS: Classical Theories of Gravity, Black Holes

ARXIV EPRINT: [0901.0393](https://arxiv.org/abs/0901.0393)

¹UMR 7164 (CNRS, Université Paris 7 Denis Diderot, CEA, Observatoire de Paris)

Contents

1	Introduction	2
2	Massive gravity and the Goldstone picture	4
2.1	Massive gravity and bigravity theories	4
2.2	The Goldstone picture	5
2.3	Strong coupling and decoupling limit in the Goldstone picture	7
3	Static spherically symmetric solutions	10
3.1	Ansätze and coordinate choices	11
3.2	The Vainshtein mechanism	13
3.2.1	A short introduction to the vDVZ discontinuity and the Vainshtein mechanism	13
3.2.2	Equations of motion in the λ, μ, ν gauge	14
3.2.3	Expansion in the Newton constant	15
3.2.4	Small R expansion	17
3.2.5	Matching small R and large R behaviours	19
4	The decoupling limit in spherically symmetric solutions	20
4.1	Extracting the limit	20
4.1.1	Rescaling and limiting equations of motion	20
4.1.2	Comparison with the Goldstone picture	23
4.1.3	Expected range of applicability of the Decoupling Limit	25
4.2	Solving the decoupling limit equation of motion	26
4.2.1	Behaviour and boundary conditions at infinity	26
4.2.2	A simple singular Cauchy problem	27
4.2.3	Solutions for the BD and AGS potentials outside the source	29
4.2.4	Solution for the BD and AGS potentials inside the source	34
4.2.5	Solution in the most general case	35
5	Discussion and conclusions	40
A	Equations of motion of X^A	41
B	Quadratic part of the equations of motion in the λ, μ, ν gauge	43
C	Expansion around $\xi = +\infty$	45
D	An example of a system with coupled normal and ghost fields	46

1 Introduction

The possibility that gravity is modified at very large, i.e. cosmological, distances is motivated not only by the wish to find alternative explanations to the cosmic acceleration (or even to replace dark matter [1]), but also because it enables to separate what does and does not depend on the dynamics of gravity at cosmological scales in the standard cosmological model. Unfortunately, to obtain such modifications in a consistent way is very difficult. One simple possibility is to try to give a mass to the graviton, and theories of "massive gravity" have attracted recently some attention (see [2] for a review). Among those theories, the simplest one are what can be called nonlinear Pauli-Fierz theories, i.e. theories made by nonlinearly completing the unique consistent quadratic theory for a Lorentz invariant massive spin 2, the Pauli-Fierz theory [3]. Such massive gravities share some properties with more complicated constructions, such as the Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP in the following) model [4]. The latter model has also the advantage to produce a late time acceleration of the Universe without the need for a non vanishing cosmological constant [5] (see however [6–8]). One of the crucial issues to be answered by such models is how to recover metrics sufficiently close to the ones obtained in Einstein's General Relativity (GR) to pass standard tests of the latter theory, while at the same time having significant deviations from GR at large distances. A first major obstacle is related to the so-called van Dam-Veltman-Zakharov (vDVZ) discontinuity [9], i.e. the fact that the quadratic Pauli-Fierz theory does not have linearized GR as a limit when the mass of the graviton is sent to zero. Soon after the discovery of the vDVZ discontinuity, it was realized that the discontinuity might in fact disappear in nonlinear Pauli-Fierz theories [10]. This because a careful examination of static spherically symmetric solutions of those theories by A. Vainshtein showed that the solutions of the linearized nonlinear Pauli-Fierz theories (i.e. those of simple Pauli Fierz theory) were only valid at distances larger than a distance scale, the Vainshtein radius R_V , which goes to infinity when the mass of the graviton is sent to zero. On the other hand, Vainshtein showed that there exists a well behaved (as the mass of the graviton is sent to zero) expansion valid at distances smaller than R_V , this expansion being defined as an expansion around the Schwarzschild solution of GR. What Vainshtein did not show is the possibility to join together those two expansions as expansions of one single non singular underlying solution [11]. In fact, in the context of nonlinear massive gravity, such a joining seems to be problematic [12, 13] even though it might work for other models where the same problem appears, such as the DGP model [14, 15]. Indeed Damour et al. found in ref. [12] by numerical integration of the equations of motion, that singularities always appear (at least for the kind of mass term considered there) in static spherically symmetric solutions of the kind considered by Vainshtein. A common wisdom is that those singularities could be related to the instabilities known to exist in nonlinear Pauli-Fierz theories and discovered by Boulware and Deser [11]. Those instabilities are also believed [16, 17] to be related to the higher derivative operators appearing in a powerful effective description of the scalar sector of massive gravity proposed by Arkani-Hamed et al. in analogy with the Stückelberg "trick" of gauge theories [18] introducing "Goldstone modes" and taking a "Decoupling Limit" (DL) in the theory. This limit is aimed at focusing on the strongest

self-interactions of the model which are seen to arise generically in the scalar sector [18]. It has in particular the property to keep the Vainshtein radius fixed and allows to understand easily the Vainshtein mechanism as well as the scaling of the dominant terms for spherically symmetric solutions in a range of distances between the Schwarzschild radius and the Vainshtein radius [16–18]. Our goal in this paper is to investigate the success or failure of the Vainshtein mechanism in this DL. It will shed light on the possible links between the failure of the Vainshtein mechanism in nonlinear massive gravities (as discovered by Damour et al. [12]) on the one hand, the Boulware Deser instability [11] and the Goldstone picture (as introduced in ref. [18]) on the other hand. Clarifying those links matters not only for a better understanding of nonlinear massive gravities (theories which are probably of limited interest as far as their application to the real world is concerned) but also for the one of more sophisticated models, such as the DGP gravity, degravitation [19] or the recently proposed Galileon [20]. For example in DGP gravity, studies of the Vainshtein recovery of GR is mostly based on a perturbation theory approach [14, 15] and it matters to know if it persists if one takes into account as completely as possible the full nonlinear structure of the theory (see e.g. [8, 21]).

The paper is organized as follows. In the next section (section 2), we introduce with some details nonlinear Pauli-Fierz theories we will be interested in, the Goldstone description of the latter, and the associated Decoupling Limit. This section, mostly introductory, will nonetheless also contain some new material concerning the Goldstone picture and the DL. We then (section 3) introduce appropriate ansätze for describing static spherically symmetric solutions of the theories introduced in the first section, as well as describe with some details the Vainshtein mechanism. Next (section 4) we turn to study static spherically symmetric solutions in the DL. We first show how to obtain the DL with the ansatz considered, then we study solutions of the DL equations of motion. Our main results appear there. We find that despite the higher derivative nature of the operator appearing in the DL, there exist non singular solutions of the vacuum equations of motion in the DL which have the right large distance behaviour. We also show that, depending on the potential, this large distance behaviour (at distances larger than the Vainshtein radius) when expressed in term of a power serie expansion, might not be enough to select a unique solution at small distance. This is in fact a blessing since it leaves more room for matching a source at small distance. We also investigate sources and show how our non singular vacuum solutions can be extended inside. In addition, we show that the small distance behaviour conjectured by Vainshtein is not the only possible one. Indeed we find a more generic scaling associated with a zero mode of the nonlinear part of the DL equations of motion which also allows the recovery of GR at small distance. Interestingly, it allows a working Vainshtein-like mechanism for potentials where it was not believed to work. Our investigations (which results are summarized in section 5) also show that the instabilities seen by Damour et al. [12] in the full nonlinear case (i.e. not the DL), and hence the failure of the Vainshtein mechanism, are not, in contrast to a widespread belief, related to the presence of a ghost (or higher derivatives in the DL picture) in the model.

2 Massive gravity and the Goldstone picture

2.1 Massive gravity and bigravity theories

It is well known that the only consistent Lorentz invariant mass term for a spin two field h_{AB} over a Minkowski space-time with canonical metric η_{AB} takes the Pauli-Fierz form given by [3]

$$S_m = -\frac{1}{8}m^2 M_P^2 \int d^4x h_{AB} h_{CD} (\eta^{AC} \eta^{BD} - \eta^{AB} \eta^{CD}) \quad (2.1)$$

where the kinetic part of the action is obtained by expanding the Einstein-Hilbert action at quadratic order in h_{AB} over the flat metric η_{AB} . In the equation above m is the graviton mass and M_P the reduced Planck mass, given by

$$M_P^{-2} = 8\pi G_N, \quad (2.2)$$

in term of the Newton constant G_N . Wishing to give a nonlinear generalization of the Pauli-Fierz theory we have just defined, it seems natural to consider theories with two metrics, $g_{\mu\nu}$ and $f_{\mu\nu}$ on a four dimensional space-time,¹ where one of the two metrics, say $g_{\mu\nu}$, will be dynamical, while the other, $f_{\mu\nu}$, will not.² Hence, we will consider the action given by

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{M_P^2}{2} R_g + L_g \right) + S_{\text{int}}[f, g], \quad (2.3)$$

In the above action, L_g denotes a generic matter Lagrangian with a minimal coupling to the metric g (and not to the metric f), and $S_{\text{int}}[f, g]$ is an interaction term with non derivative couplings between the two metrics. There is much freedom in the choice of this interaction term. For example, the following two possibilities have been considered respectively by Boulware and Deser (BD) in ref. [11] and by Arkani-Hamed et al. (AGS) in ref. [18],

$$S_{\text{int}}^{(2)} = -\frac{1}{8}m^2 M_P^2 \int d^4x \sqrt{-f} H_{\mu\nu} H_{\sigma\tau} (f^{\mu\sigma} f^{\nu\tau} - f^{\mu\nu} f^{\sigma\tau}) \quad (2.4)$$

$$S_{\text{int}}^{(3)} = -\frac{1}{8}m^2 M_P^2 \int d^4x \sqrt{-g} H_{\mu\nu} H_{\sigma\tau} (g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} - g^{\mu\nu} g^{\sigma\tau}), \quad (2.5)$$

where $f^{\mu\nu}$ and $g^{\mu\nu}$ denotes respectively the inverse of the metric $f_{\mu\nu}$ and $g_{\mu\nu}$, and $H_{\mu\nu}$ is defined by

$$H_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - f_{\mu\nu}.$$

Following the notations of Damour et al., Damour:2002ws, these interaction terms are in the form

$$S_{\text{int}}^{(a)} = -\frac{1}{8}m^2 M_P^2 \int d^4x \mathcal{V}^{(a)}(g, f) \equiv -\frac{1}{8}m^2 M_P^2 \int d^4x \sqrt{-g} V^{(a)}(\mathbf{g}^{-1} \mathbf{f}) \quad (2.6)$$

¹For reasons that will appear in the following, we use both capital latin letters and greek letters to indicate space-time indices.

²Theories of this kind have been considered in the past in the context of strong interactions [22]. Note that this is not the only possible way to define a nonlinear completion of Pauli-Fierz theory, see e.g. the recent proposal [23].

with $\mathcal{V}^{(a)}(g, f) \equiv \sqrt{-g} V^{(a)}(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{f})$ a suitable "potential" density. In this work we will consider theories where the potential $\mathcal{V}^{(a)}$ will not be necessarily one of the two above forms (2.4)–(2.5),³ but will be chosen such that (i) it is a scalar density under diffeomorphisms (common to the two metrics) and (ii) that when one expands g to second order around the canonical Minkowski metric η_{AB} as $g_{AB} = \eta_{AB} + h_{AB}$ and let f assumes the canonical Minkowski form η_{AB} , the potential at quadratic order for h_{AB} takes the Pauli-Fierz form (2.1). Note however that many choices can be made with those two same properties. The theories considered will then be invariant under common diffeomorphisms which transforms the metric as

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu x'^\sigma(x) \partial_\nu x'^\tau(x) g'_{\sigma\tau}(x'(x)) , \\ f_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu x'^\sigma(x) \partial_\nu x'^\tau(x) f'_{\sigma\tau}(x'(x)) , \end{aligned} \quad (2.7)$$

and under which the quantity $V^{(a)}$ transforms as a scalar. It is then possible to show that it only depends on the matrix $\mathbf{g}^{-1}\mathbf{f}$ [24], hence the notation in equation (2.6). The equations of motion, derived from action (2.3), read

$$M_P^2 G_{\mu\nu} = (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^g) , \quad (2.8)$$

where $G_{\mu\nu}$ denotes the Einstein tensor computed with the metric g , $T_{\mu\nu}$ is the energy momentum tensor of matter fields, and $T_{\mu\nu}^g$ is the effective energy momentum tensor coming from the variation with respect to the metric g of the interaction term S_{int} . It depends non derivatively on both metrics f and g and is defined as usual as

$$T_{\mu\nu}^g(x) = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}(x)} S_{\text{int}}(f, g). \quad (2.9)$$

A simple, but non trivial, consequence of equations (2.8) is obtained by taking a g -covariant derivative ∇ of both sides of the equations; one gets, using the Bianchi identities and the conservation of the matter energy momentum tensor, the constraint

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^g = 0 \quad (2.10)$$

which the effective energy momentum tensor should obey.

2.2 The Goldstone picture

The gauge invariance (2.7) can be used to write the background flat metric f in various coordinate systems. Starting from a given gauge, with coordinate X^A , and the f metric in the form $f_{AB}(X)$, it might be desirable to change the gauge, but keep the change of coordinate explicit in the f metric. Namely, the action is the same as action (2.3), but with $f_{\mu\nu}(x)$ now given by the expression

$$f_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu X^A(x) \partial_\nu X^B(x) f_{AB}(X(x)) , \quad (2.11)$$

while g is kept as $g_{\mu\nu}(x)$. The quantities X^A , which then appear explicitly in the action of the theory, can be considered as a set of four new dynamical scalar fields, which are

³We keep the numbering of the potentials (2.4)–(2.5) of ref. [24].

analogous to the Stückelberg field used to restore gauge invariance in the Proca Lagrangian. Indeed, under a subsequent coordinate change $x \rightarrow x'(x)$, $\partial_\mu X^A(x)$ transforms as

$$\partial_\mu X^A(x) = \partial_\mu x'^\sigma \partial_\sigma X^A(x'),$$

and hence the quantity $f_{\mu\nu}(x)$ transforms as a covariant tensor of rank 2, as it should, while f_{AB} is left unchanged by this coordinate transformation. With this in mind and the analogy with the Stückelberg procedure and Goldstone equivalence theorem, the initial gauge, where g and f assume the form g_{AB} and f_{AB} is usually called a "unitary gauge",⁴ i.e. one where the Stückelberg fields X^A are gauged away. Note that the metric $f_{\mu\nu}$ in a non unitary gauge can also be thought as the pullback, via the "link field" $X^A(x)$, on the space-time manifold m_4 , with coordinates x^μ , of the metric f_{AB} living in an other abstract manifold \mathcal{M}_4 with coordinates X^A . Usually, the unitary gauge is chosen such that in this gauge the metric f_{AB} takes the canonical Minkowski form $\text{diag}(-1, 1, 1, 1) \equiv \eta_{AB}$. In the non unitary gauge, the action (2.3) is one for a theory with $g_{\mu\nu}$ and X^A as dynamical fields. Obviously, the equations of motion for $g^{\mu\nu}$ lead to the same equations as in (2.8) where $f_{\mu\nu}$ is given in the form (2.11). Let us briefly turn to the equations of motion for X^A . The link fields X^A only enter the action through the metric $f_{\mu\nu}$ given by equation (2.11), hence the variation of the action with respect to X^A , $\delta S_{\text{int}}(f, g)$, is given by

$$\delta S_{\text{int}}(f, g) = -\frac{1}{8} m^2 M_P^2 \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta f_{\mu\nu}(x)} \mathcal{V}^{(a)}(f, g) \right) \delta f_{\mu\nu},$$

where $\delta f_{\mu\nu}$ is the variation of $f_{\mu\nu}$ under $X^A(x) \rightarrow X^A(x) + \delta X^A(x)$. It is easily seen that the latter is given by (see appendix A)

$$\delta f_{\mu\nu} = \partial_\mu \delta x^\sigma f_{\sigma\nu} + \partial_\nu \delta x^\sigma f_{\mu\sigma} + \delta x^\sigma \partial_\sigma f_{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

where $\delta x^\mu(x)$ is defined by

$$\delta x^\mu(x) = \delta X^A(x) \partial_A x^\mu(X(x)) \quad (2.13)$$

and $x^\mu(X)$ denote the inverse mapping of $X^A(x)$. Hence, the variation of f takes the form of the Lie derivative $\mathcal{L}_{\delta x} f_{\mu\nu}$ of f along the quantities δx^μ considered as a vector field on the space-time manifold. However, the interaction term $S_{\text{int}}(f, g)$ has been constructed to be a scalar under coordinates changes, hence in particular under those of the form $x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu$, with δx^μ defined as above. So one has

$$\int d^4x \left[\left(\frac{\delta}{\delta f_{\mu\nu}(x)} \mathcal{V}^{(a)}(f, g) \right) \mathcal{L}_{\delta x} f_{\mu\nu} + \left(\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \mathcal{V}^{(a)}(f, g) \right) \mathcal{L}_{\delta x} g_{\mu\nu} \right] = 0.$$

Using this, and the definition (2.9), we get the following expression for the variation $\delta S_{\text{int}}(f, g)$ of the interaction term $S_{\text{int}}(f, g)$

$$\delta S_{\text{int}}(f, g) = \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\mu T_g^{\mu\nu}) (\partial_A x^\sigma) g_{\sigma\nu} \delta X^A(x). \quad (2.14)$$

⁴In the following, we will always use indices with capital latin letters from the beginning of the alphabet A, B, C, \dots to denote quantities written in a unitary gauge, like the coordinates X^A and metrics f_{AB} and g_{AB} , and greek letters from the middle of the alphabet, μ, ν, \dots to designate quantities in a non unitary gauge.

Hence we see that the equation of motion of X^A are equivalent to the Bianchi identities (2.10) provided that the mapping $X^A(x)$ is invertible. Note that above, we have lifted and lowered indices with $g_{\mu\nu}$. This will be the case in all the following except for what concerns the metric $f_{\mu\nu}$, the indices of which are moved with f itself. Note also that in the above derivation we have not used the fact that f_{AB} is the canonical Minkowski metric η_{AB} and hence, it also holds when it is not the case.

2.3 Strong coupling and decoupling limit in the Goldstone picture

The authors of ref. [18] have further developed the above mentioned analogy between X^A and Stückelberg fields. Indeed, following [18], one can do a "Goldstone boson" expansion of the action (2.3) around a unitary gauge. Indeed, considering some background solution for $g_{\mu\nu}$ (defined as $g_{\mu\nu}^0$) and $X^A(x)$ defined (the metric f_{AB} being kept fixed) as

$$X_0^A(x) \equiv \delta_\mu^A x^\mu,$$

ref. [18] introduces the "pion" fields π^A as

$$X^A(x) = X_0^A(x) + \pi^A(x), \quad (2.15)$$

and further does a "scalar-vector" decomposition of the π^A in the form

$$\pi^A(x) = f^{AB} (A_B + \partial_B \phi). \quad (2.16)$$

Note that this notation is a bit problematic if one is interested in the structure of the theory beyond linearized equations of motion. Indeed, first neither the π^A defined as above, nor ϕ and A^B are tensors on the Manifold \mathcal{M}_4 (and one does not see the need for the metric f^{AB} above). Second, given the definition (2.15), it is natural to assume that ϕ is a function of x^μ (not of the X^A) and hence one does not see why it is differentiated above with respect to X^B . In fact, if one takes the definition (2.16) literally and write $\partial_B \phi = \partial_B x^\mu \partial_\mu \phi$, one sees that $\partial_B x^\mu$ is expressible formally as a serie of π^A (using (2.15)) and hence also of ϕ . This will generate terms at nonlinear order which will be different from the ones one gets using the naive expression $\partial_B \phi = \delta_B^\mu \partial_\mu \phi$. The same will be true if one considers metrics f_{AB} with non trivial dependence in the coordinates X^A (so that this later problem does not arise when f_{AB} is taken to be the canonical flat metric, but will e.g. if one chooses to parametrize Minkowski space-time in a non trivial way). To avoid those difficulties, we will write, instead of (2.16) (and in fact this seems to be what is done implicitly in ref. [18] to deal with nonlinear order)

$$\pi^A(x) = \delta_\mu^A (A^\mu(x) + \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi). \quad (2.17)$$

If one inserts the decomposition (2.17) into action (2.3), and expands around flat space-time writing $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, we obtain an action for the dynamical fields $h_{\mu\nu}(x)$, $A^\mu(x)$ and $\phi(x)$. Since $A^\mu(x)$ and $\phi(x)$ only enter in the metric $f_{\mu\nu}$, via expression (2.11), the only term in action (2.3) which depends on $A^\mu(x)$ and $\phi(x)$ is the interaction term $S_{int}[f, g]$,

and one has from (2.11) (where no term has been neglected in the expression below)

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} = & h_{\mu\nu} - \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - 2\partial_\mu \partial_\nu \phi \\ & - \partial_\mu A_\sigma \partial_\nu A^\sigma - \partial_\mu \partial_\sigma \phi \partial_\nu \partial^\sigma \phi \\ & - \partial_\nu A^\sigma \partial_\mu \partial_\sigma \phi - \partial_\mu A^\sigma \partial_\nu \partial_\sigma \phi. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Inserting this expression into $S[f, g]$, and keeping the lowest order in $h_{\mu\nu}(x)$, $A^\mu(x)$ and $\phi(x)$, one obtains the following first non trivial terms (upon integration by part)

$$\begin{aligned} S = & \frac{M_P^2}{8} \int d^4x \left\{ 2h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h - 2h^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\sigma h_\mu^\sigma + h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} - h \square h \right. \\ & + m^2 [h^2 - h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 4(h \partial A - h_{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu) - 4(h \square \phi - h_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu \phi)] \\ & \left. + \frac{4}{M_P^2} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \right\} \end{aligned}$$

where $h \equiv h_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu}$, $\partial A \equiv \partial_\mu A^\mu$, $T_{\mu\nu}$ is the matter stress-energy tensor, and indices are moved up and down with the metric $\eta_{\mu\nu}$. The peculiarity of the above expression is that while A^μ acquires a standard kinetic term, ϕ does only get one via a mixing with $h_{\mu\nu}$ [18], this being entirely due to the structure of the Pauli-Fierz mass term (2.1). A way to demix ϕ and $h_{\mu\nu}$ is to do the shift [18]

$$h_{\mu\nu} = \hat{h}_{\mu\nu} - m^2 \eta_{\mu\nu} \phi.$$

The quadratic interaction action then becomes

$$\begin{aligned} S_{\text{int}} = & \frac{M_P^2 m^2}{8} \int d^4x \left\{ \hat{h}^2 - \hat{h}_{\mu\nu} \hat{h}^{\mu\nu} - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 4(\hat{h} \partial A - \hat{h}_{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu) \right. \\ & \left. + 6m^2 [\phi(\square + 2m^2)\phi - \hat{h}\phi + 2\phi\partial A] \right\}. \end{aligned}$$

The interactions between ϕ , A and $\hat{h}_{\mu\nu}$ can be canceled by adding an appropriate gauge fixing to the action (see [25]). Following again [18], we can obtain canonically normalized fields $\tilde{\phi}$, \tilde{A} and $\tilde{h}_{\mu\nu}$ by defining

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{\mu\nu} &= M_P \hat{h}_{\mu\nu}, \\ \tilde{A}^\mu &= M_P m A^\mu, \\ \tilde{\phi} &= M_P m^2 \phi. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Doing so, and expanding the action in $\tilde{\phi}$, \tilde{A} and $\tilde{h}_{\mu\nu}$ one sees using (2.18) that $\tilde{\phi}$ has in general cubic self interactions suppressed by the energy scale

$$\Lambda = (m^4 M_P)^{1/5}. \quad (2.20)$$

When those interactions are present,⁵ they are the strongest interactions among the fields $\tilde{\phi}$, \tilde{A} and $\tilde{h}_{\mu\nu}$ in the limit where $m \ll M_P$, besides quadratic, cubic and quartic non

⁵An appropriate choice of the interaction term $S_{\text{int}}[f, g]$ can remove cubic (and others) self interactions of $\tilde{\phi}$ [18].

derivative interactions.⁶ Indeed, using the expansion (2.18), it is easy to see that those interactions, coming from the interaction term (2.6), scale as

$$\Lambda_{k_1, k_2, k_3, k_4}^{4-k_1-2k_2-3k_3-k_4} \tilde{h}^{k_1} \left(\partial \tilde{A} \right)^{k_2} \left(\partial \partial \tilde{\phi} \right)^{k_3} \tilde{\phi}^{k_4} \quad (2.21)$$

where k_1, k_2, k_3 and k_4 are integers and the expressions $\Lambda_{k_1, k_2, k_3, k_4}$ are given by

$$\Lambda_{k_1, k_2, k_3, k_4} = \Lambda \left(\frac{M_P}{m} \right)^{\frac{4k_1+3k_2+2k_3+4k_4-6}{5(k_1+2k_2+3k_3+k_4-4)}}. \quad (2.22)$$

Whenever $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + k_4 = 4$ (which can only happen for $k_1 + k_4 = 4, k_2 = 0, k_3 = 0$ or for $k_1 + k_4 = 2, k_2 = 1$ and $k_3 = 0$), the coefficient in front of $\tilde{h}^{k_1} (\partial \tilde{A})^{k_2} (\partial \partial \tilde{\phi})^{k_3} \tilde{\phi}^{k_4}$ in eq. (2.21) is equal to the dimensionless expressions m^2/M_P^2 or m/M_P and the corresponding interactions include in particular quartic non derivative couplings between $\tilde{\phi}$ and \tilde{h} . In all other cases, $\Lambda_{k_1, k_2, k_3, k_4}$ has the dimension of an energy. It is equal to m for quadratic interactions and m^2/M_P for cubic non derivative interactions. Hence, besides quadratic, cubic and quartic non derivative interactions, it is easily seen that the strongest interaction among the canonically normalized fields is the cubic derivative self interaction of $\tilde{\phi}$ suppressed by the scale $\Lambda = \Lambda_{0,0,3,0}$. All the other interactions are suppressed by a scale larger or equal to $\Lambda_{0,0,4,0}$, with $\Lambda_{0,0,4,0} = M_P^{1/4} m^{3/4}$ [16, 18, 25]. In other words the exponent in the right hand side of the above formula (2.22) is bounded below by 1/20 as soon as $\{k_1, k_2, k_3, k_4\} \neq \{0, 0, 3, 0\}$ (not considering the above mentioned non derivative quadratic, cubic and quartic interactions). Hence, for $m \ll M_P$ the scale Λ_4 is strictly larger than Λ , while the non derivative cubic and quartic interactions are much smaller than the quadratic mass terms (for small expectation values of the fields). This indicates that there is a regime where the theory considered, and hence also its solutions, is well approximated⁷ by retaining only the quadratic action and the cubic self interaction of $\tilde{\phi}$, as noted in particular in ref. [16]. This regime can be extended to arbitrarily high energy scale⁸ (or arbitrarily small distances) by choosing a sufficiently large ratio M_P/m , as can be seen from the relation (2.22). In fact, one can take a *decoupling limit*, that suppresses all the interactions but the cubic $\tilde{\phi}$ derivative self interaction. This limit is defined as

$$\begin{aligned} M_P &\rightarrow \infty, \\ m &\rightarrow 0, \\ \Lambda &\sim \text{constant}, \\ T_{\mu\nu}/M_P &\sim \text{constant}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

⁶We include here and in the following with those interactions, a peculiar set of cubic interactions, with a derivative coupling to \tilde{A} , corresponding to $k_1 + k_4 = 2, k_2 = 1$ and $k_3 = 0$ (see below), which will play a similar role.

⁷Of course the discussion here is a bit loose, it will be made more precise when dealing with spherically symmetric solutions.

⁸We do not consider here, as done e.g. in [18], the issue of the quantum corrections to the theory and only discuss it from a purely classical perspective.

In this limit, all the quantities $\Lambda_{k_1, k_2, k_3, k_4}$ (with $\{k_1, k_2, k_3, k_4\} \neq \{0, 0, 3, 0\}$) are sent to zero or infinity. The action one is left with for $\tilde{\phi}$ is of the form⁹

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \left\{ \frac{3}{2} \tilde{\phi} \square \tilde{\phi} + \frac{1}{\Lambda^5} \left[\alpha \left(\square \tilde{\phi} \right)^3 + \beta \left(\square \tilde{\phi} \tilde{\phi}_{,\mu\nu} \tilde{\phi}^{,\mu\nu} \right) \right] - \frac{1}{M_P} T \tilde{\phi} \right\}, \quad (2.24)$$

where α and β are numerical coefficients that can be adjusted at will by choosing an appropriate interaction term $S_{\text{inf}}[f, g]$,¹⁰ and T is the trace of the energy momentum tensor. For example, the BD potential (2.4) leads to $\alpha = -\beta = -1/2$, while the AGS potential (2.5) leads to the opposite case $\alpha = -\beta = 1/2$. The equation of motion deriving from this action is

$$3\square\tilde{\phi} + \frac{1}{\Lambda^5} \left[3\alpha \square \left(\square \tilde{\phi} \right)^2 + \beta \square \left(\tilde{\phi}_{,\mu\nu} \tilde{\phi}^{,\mu\nu} \right) + 2\beta \partial_\mu \partial_\nu \left(\square \tilde{\phi} \tilde{\phi}^{,\mu\nu} \right) \right] = \frac{1}{M_P} T. \quad (2.25)$$

This equation of motion is fourth order which signals generically ghost propagating degrees of freedom. In fact, one can argue [16, 17] that one can see this way a generic property of massive gravity once discovered by Boulware and Deser [11]: namely the fact that nonlinear massive gravity propagates at nonlinear level one more degree of freedom than linear Pauli-Fierz theory, the energy of the extra propagating mode being unbounded below. This is a major obstacle to the possibility to consider nonlinear Pauli-Fierz theories defined as above as a realistic theories (see however [26]), but, again, our aim is here to use this theory like a toy model to study the Vainshtein mechanism, and not to advocate for a realistic use of it.

3 Static spherically symmetric solutions

In this section we introduce our framework to look for static spherically symmetric solutions of massive gravity. We also describe the Vainshtein mechanism. First, in section 3.1, we present ansätze for the metrics and discuss possible coordinate choices. In what follows we will mainly be interested in the bi-diagonal ansätze, i.e. those where both metrics can be put simultaneously in a diagonal form. It turns out that, in this case, a convenient coordinate choice is so-called the λ, μ, ν gauge (following the terminology of reference [12]) that will be introduced. The equations of motion in this gauge (together with the Bianchi identity) form a system of ordinary differential equations for the three functions λ, ν and μ to be determined. This system is strongly nonlinear and cannot be integrated analytically. However, different asymptotic regimes can be studied separately. First, one expansion can be made in the Newton constant, G_N . This expansion will be found to be valid far from the source (i.e. for distances $R \gg R_V$, where R_V is the Vainshtein radius that we will introduce). At lowest order, it does not match the similar expansion that one can make in General Relativity, this being reexpressed in the form of the vDVZ discontinuity.

⁹While \tilde{h} \tilde{A} become free.

¹⁰Note that in general, the cubic term for $\tilde{\phi}$ is given by some linear combination of the three terms $(\square \tilde{\phi})^3$, $\square \tilde{\phi} \tilde{\phi}_{,\mu\nu} \tilde{\phi}^{,\mu\nu}$ and $\tilde{\phi}_{,\mu\nu} \tilde{\phi}^{,\mu\alpha} \tilde{\phi}_{,\alpha}^{\nu}$, but an integration by part can always be used to reduce the number of independent terms to two, as shown in eq. (2.24).

Vainshtein conjectured that close to the source the General Relativity solution can be restored via the effect of the nonlinear corrections. This is the essence of the Vainshtein mechanism explained in section 3.2. In the Vainshtein original proposal [10], a scaling with distance is proposed for the first correction to the Schwarzschild solution close to the source (i.e. for $R \ll R_V$). Here we show that there is another possible scaling that will play an important rôle, as will be discussed in section 4.

3.1 Ansätze and coordinate choices

The most general static spherically symmetric ansatz for solutions of the theory defined by action (2.3) takes the form

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= -J(r)dt^2 + K(r)dr^2 + L(r)r^2d\Omega^2, \\ f_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= -C(r)dt^2 + 2D(r)dt dr + A(r)dr^2 + B(r)d\Omega^2, \end{aligned}$$

where $d\Omega^2$ is the canonical metric of a unit 2-sphere

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2.$$

The above ansatz can further be simplified by setting L be one, by a suitable choice of the radial coordinate r . However, in general, it is not possible to put both metric at the same time in a diagonal form by a coordinate change without imposing restrictions on the solutions, this is because we only have one diffeomorphism invariance (2.7) at hand. Different cases have been considered in the literature and some solutions are explicitly known in the case when metrics are not both diagonal [12, 27]. In this work we will only consider bi-diagonal cases where the non dynamical metric is parametrizing a Minkowski (non dynamical) background space-time. It will turn out useful to use different type of gauge and ansätze. A first gauge choice (called the "a,b,c gauge" in [12]) is defined by metrics in the following form

$$\begin{aligned} g_{AB}dx^A dx^B &= -J(r)dt^2 + K(r)dr^2 + L(r)r^2d\Omega^2 \\ f_{AB}dx^A dx^B &= -dt^2 + dr^2 + r^2d\Omega^2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

A simple coordinate change $X^A(X')$

$$\begin{aligned} z &= r \cos\theta, \\ x &= r \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi, \end{aligned}$$

puts of course f_{AB} in the canonical Minkowski form η_{AB} (we will not need the corresponding expression for g)

$$f_{AB}dx^A dx^B = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{3.2}$$

Note that both gauges (3.1) and (3.2) have in common that all the unknown functions (J , K and L) are put in the metric g and hence, in agreement with our definitions of section 2.2, we can consider those gauges as unitary. A non unitary gauge, which has some

advantages, is the one where one of the unknown function J, K, L is put into the expression of the non dynamical metric, given by

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= -e^{\nu(R)}dt^2 + e^{\lambda(R)}dR^2 + R^2d\Omega^2, \\ f_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= -dt^2 + \left(1 - \frac{R\mu'(R)}{2}\right)^2 e^{-\mu(R)}dR^2 + e^{-\mu(R)}R^2d\Omega^2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

where here and in the following a prime denotes a derivation with respect to R . The relation between gauges (3.1) and (3.3) is given by

$$Re^{-\mu(R)/2} = r, \quad (3.4)$$

while the relation between the functions appearing in the metric coefficients are

$$\begin{aligned} J(r) &= e^{\nu(R)}, \\ K(r) &= e^{\lambda(R)}e^{\mu(R)}\left(1 - \frac{R\mu'(R)}{2}\right)^{-2}, \\ L(r) &= e^{\mu(R)}. \end{aligned}$$

Following reference [12], we will call the gauge (3.3) the λ, μ, ν gauge. It has the advantage that the g metric can readily be compared to the usual Schwarzschild metric of standard General Relativity. The coordinate change defined by

$$\begin{aligned} Z &= R \cos \theta, \\ X &= R \sin \theta \cos \varphi, \\ Y &= R \sin \theta \sin \varphi, \end{aligned}$$

puts then the metric g and f in the form

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= -e^{\nu(R)}dt^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 \\ &\quad + \left(\frac{e^{\lambda(R)} - 1}{R^2}\right)(XdX + YdY + ZdZ)^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} f_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= -dt^2 + e^{-\mu(R)}(dX^2 + dY^2 + dZ^2) \\ &\quad + \left(-\frac{\mu'}{R} + \frac{\mu'^2}{4}\right)e^{-\mu(R)}(XdX + YdY + ZdX)^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

with $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$. We obtain easily the relation between coordinates $\{X^A\} = \{t, x, y, z\}$ of the unitary gauge (3.2) and coordinates $\{x^\mu\} = \{t, X, Y, Z\}$ of the non unitary gauge (3.5) as (the time coordinate t being the same in the two gauges).

$$\begin{aligned} x &= Xe^{-\mu(R)/2} = X\frac{r}{R} = r\partial_X R, \\ y &= Ye^{-\mu(R)/2} = Y\frac{r}{R} = r\partial_Y R, \\ z &= Ze^{-\mu(R)/2} = Z\frac{r}{R} = r\partial_Z R. \end{aligned} \quad (3.7)$$

The Jacobian \tilde{J} of the transformation (3.7), $|\partial_\mu X^A|$, is given by

$$\tilde{J} = e^{-\frac{3}{2}\mu(R)} \left(1 - \frac{R}{2}\mu'(R)\right). \quad (3.8)$$

It does not vanish except possibly on a sphere of radius R where

$$\frac{R}{2}\mu'(R) = 1. \quad (3.9)$$

Obviously, a generic function μ would not define via eq. (3.7) a one to one mapping over the whole Minkowski space. To obtain such a mapping, a sufficient condition is that $r(R)$ is a strictly monotonous function of R which maps the real positive half line to itself with an everywhere non vanishing Jacobian. In this paper, because we will deal with the Decoupling Limit, we will not be careful about what is happening at the origin $r = 0$. However, a necessary condition on μ is that $r(R)$ maps the origin to itself, and hence μ should verify

$$\lim_{R \rightarrow 0} R e^{-\mu(R)/2} = 0. \quad (3.10)$$

Note that the monotonicity of $r(R)$ is automatic, provided that (3.9) never holds. Given a particular solution for μ , λ , and ν , the above conditions could prevent the solution to be interpreted as a correct solution of the equation of motion of the theory (2.3).

3.2 The Vainshtein mechanism

3.2.1 A short introduction to the vDVZ discontinuity and the Vainshtein mechanism

The (quadratic) Pauli-Fierz theory, with a mass term given as in eq. (2.1), is known to suffer from the van Dam-Veltman-Zakharov (vDVZ) discontinuity, i.e. the fact that when one lets the mass m of the graviton vanish, one does not recover predictions of General Relativity. E.g., if one adjusts the parameters (namely the Planck scale) such that the Newton constant agrees with the one measured by some type of Cavendish experiment, then the light bending as predicted by Pauli-Fierz theory (and for a vanishingly small graviton mass) will be 3/4 of the one obtained by linearizing GR [9].¹¹ One way to see this is to consider solutions of equations of motion (2.8) which are static and spherically symmetric and which would describe the metric around a spherically symmetric body such as the Sun. To do so, using the ansatz (3.3) is especially convenient because in this form the g metric can be easily compared with the standard Schwarzschild solution. If one tries to find a solution expanding in the Newton constant, as we recall in subsection 3.2.3, one finds immediately the vDVZ discontinuity appearing in the form of a different (m independent)

¹¹The fact it is smaller is easy to understand: the essential difference between Pauli-Fierz theory and linearized GR comes from an extra propagating scalar mode present in the massive theory. This mode exerts an extra attraction in the massive case compared to the massless case. Hence, if one wants measurements of the force exerted between non relativistic masses to agree, the coupling constant of the massive theory should be smaller than that of the massless theory. But light bending is blind to the scalar sector - because the light energy momentum tensor is traceless. Hence, provided the two theories agree on the force between non relativistic probes, the massive theory would predict a smaller light bending than the massless one.

absolute value of the coefficients in front of the first non trivial correction to flat space-time in g_{tt} and g_{RR} components (neglecting the Yukawa decay by assuming the Compton wavelength of the graviton is much larger than other distances of interest). However, as first noticed by Vainshtein [10], the computation of the next order correction shows that the first order approximation ceases to be valid at distances to the source smaller than a composite scale, the Vainshtein radius defined by

$$R_V = (m^{-4} R_S)^{1/5}, \quad (3.11)$$

where R_S is the Schwarzschild radius of the source. This Vainshtein radius obviously diverges when one lets m go to zero and in fact is much larger than the solar system size for a massive graviton with a Compton wavelength of the order of the Hubble radius. Hence, one can not conclude that massive gravity is ruled out based on solar system observations and results of the original works on the vDVZ discontinuity [9]. Vainshtein also showed that an expansion *defined* around the standard Schwarzschild solution can be obtained (as recalled in subsection 3.2.4) that is well behaved when the mass of the graviton is sent to zero, opening the possibility of a recovery of GR solution at small distances R of the source. Indeed, the domain of validity of this second expansion was shown to be $R \ll R_V$. Moreover, the correction found by Vainshtein to the Schwarzschild solution are non analytic in the Newton constant which could have explained the failure of the attempt to obtain a solution expanding in the Newton constant. This is the aim of this section 3.2 to give more details on the so-called Vainshtein mechanism, i.e. the possibility of a non-perturbative recovery of solutions of GR, which is the bulk of the studies of this work.

3.2.2 Equations of motion in the λ, μ, ν gauge

Let us first consider the gauge (3.3). In this gauge, the equations of motion (2.8) read

$$\begin{aligned} e^{\nu-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{R} + \frac{1}{R^2} (e^\lambda - 1) \right) &= 8\pi G_N (T_{tt}^g + \rho e^\nu), \\ \frac{\nu'}{R} + \frac{1}{R^2} (1 - e^\lambda) &= 8\pi G_N (T_{RR}^g + P e^\lambda), \end{aligned} \quad (3.12)$$

where the source energy momentum tensor T_μ^ν is assumed to have the perfect fluid form

$$T_\mu^\nu = \text{diag}(-\rho, P, P, P),$$

with total mass

$$M \equiv \int_0^{R_\odot} 4\pi R^2 \rho \, dR.$$

The matter conservation equation reads

$$P' = -\frac{\nu'}{2}(\rho + P), \quad (3.13)$$

while the Bianchi identities have the only non trivial component

$$-\frac{1}{m^2 M_P^2} \frac{1}{R} \nabla^\mu T_{\mu R}^g = 0. \quad (3.14)$$

Expanding equations (3.12) and (3.14) in power of λ , ν and μ , we find

$$\begin{aligned} \frac{\lambda'}{R} + \frac{\lambda}{R^2} + G_{tt}^{(Q)}(\nu, \lambda) + G_{tt}^{(C^>)}(\nu, \lambda) &= -\frac{m^2}{2}(\lambda + 3\mu + R\mu') + 8\pi G_N \rho \\ &\quad + m^2 Q_{tt}(\nu, \lambda, \mu) + \nu 8\pi G_N \rho \\ &\quad + m^2 C_{tt}^{>}(\nu, \lambda, \mu) \\ &\quad + \nu 8\pi G_N \rho (e^\mu - 1 - \mu), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\nu'}{R} - \frac{\lambda}{R^2} + G_{RR}^{(Q)}(\nu, \lambda) + G_{RR}^{(C^>)}(\nu, \lambda) &= \frac{m^2}{2}(\nu + 2\mu) + 8\pi G_N P \\ &\quad + m^2 Q_{RR}(\nu, \lambda, \mu) + \lambda 8\pi G_N P \\ &\quad + m^2 C_{RR}^{>}(\nu, \lambda, \mu) \\ &\quad + \nu 8\pi G_N P (e^\lambda - 1 - \lambda), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\frac{\lambda}{R^2} - \frac{\nu'}{2R} - Q_b(\nu, \lambda, \mu) - C_b^{>}(\nu, \lambda, \mu) = 0, \quad (3.17)$$

where $G_{tt}^{(Q)}$, $G_{RR}^{(Q)}$ and Q_b represent respectively the quadratic (in power of λ, μ and ν) part of G_{tt} , G_{RR} and the Bianchi identity; $G_{tt}^{(C^>)}$, $G_{RR}^{(C^>)}$ and $C_b^{>}$ represent respectively the cubic and higher part of G_{tt} , G_{RR} and the Bianchi identity. The expressions of some of those quantities can be found in appendix B.

3.2.3 Expansion in the Newton constant

We can first look for solution of the system (3.15)–(3.17) expanding the solution into powers of the usual Schwarzschild radius R_S of the source (or into the Newton constant). More explicitly, we expand as in

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \lambda_1 + \dots \\ \nu &= \nu_0 + \nu_1 + \dots \\ \mu &= \mu_0 + \mu_1 + \dots \end{aligned}$$

where λ_i, ν_i, μ_i are expected to be proportional to G_N^{i+1} , and we consider a regime where $\lambda_{i+1} \ll \lambda_i$, $\nu_{i+1} \ll \nu_i$ and $\mu_{i+1} \ll \mu_i$.

At linear order, far from the source, the equations of motion reduce to

$$\begin{aligned} \frac{\lambda'_0}{R} + \frac{\lambda_0}{R^2} &= -\frac{m^2}{2}(\lambda_0 + 3\mu_0 + R\mu'_0), \\ \frac{\nu'_0}{R} - \frac{\lambda_0}{R^2} &= \frac{m^2}{2}(\nu_0 + 2\mu_0), \\ \frac{\lambda_0}{R^2} &= \frac{\nu'_0}{2R}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Notice that the expansion of the Bianchi identity does not contain a term linear in μ , as can be seen from equation (3.17), this being due to the peculiar structure of the Pauli-Fierz mass term. The exact solution of the system (3.18) can be found in ref. [12]. However, we are interested here in the limit where $Rm \ll 1$, and want to simplify the linear system accordingly. One can see from the third equation that λ_0 and ν_0 are of the same order:

$\lambda_0 \sim \nu_0$, while the first or the second equation indicates that $\mu_0 \sim \lambda_0/(mR)^2 \gg \lambda_0, \nu_0$. As a consequence, the system can be simplified to

$$\begin{aligned}\frac{\lambda'_0}{R} + \frac{\lambda_0}{R^2} &= -\frac{m^2}{2}(3\mu_0 + R\mu'_0), \\ \frac{\nu'_0}{R} - \frac{\lambda_0}{R^2} &= m^2\mu_0, \\ \frac{\lambda_0}{R^2} &= \frac{\nu'_0}{2R},\end{aligned}$$

with the scaling (valid for $mR \ll 1$)

$$\mu_0 \gg \lambda_0 \sim \nu_0. \quad (3.19)$$

One can extract from the above system an equation for μ_0 reading

$$3\mu_0 + R\mu'_0 = 0, \quad (3.20)$$

which can easily be solved to get

$$\lambda_0 = \frac{C_1}{2R}, \quad \nu_0 = -\frac{C_1}{R}, \quad \mu_0 = \frac{1}{(mR)^2} \frac{C_1}{2R}. \quad (3.21)$$

where C_1 is a constant of integration which is expected to be proportional to G_N and has to be fixed by matching to the source.

At second order, we solve

$$\frac{\lambda'_1}{R} + \frac{\lambda_1}{R^2} + G_{tt}^{(Q)}(\nu_0, \lambda_0) = -\frac{m^2}{2}(\lambda_1 + 3\mu_1 + R\mu'_1) + m^2 Q_{tt}(\nu_0, \lambda_0, \mu_0), \quad (3.22)$$

$$\frac{\nu'_1}{R} - \frac{\lambda_1}{R^2} + G_{rr}^{(Q)}(\nu_0, \lambda_0) = \frac{m^2}{2}(\nu_1 + 2\mu_1) + m^2 Q_{rr}(\nu_0, \lambda_0, \mu_0), \quad (3.23)$$

$$\frac{\lambda_1}{R^2} = \frac{\nu'_1}{2R} + Q_b(\nu_0, \lambda_0, \mu_0). \quad (3.24)$$

Assuming that ν_1 and λ_1 are of the same order (in line with $\nu_0 \sim \lambda_0$), and using the scaling (3.19) we find from (3.24) the scaling

$$\lambda_1 \sim \nu_1 \sim \mu_0^2 \sim \frac{R_S}{R} \times \frac{1}{(mR)^4} \frac{R_S}{R}.$$

As a consequence the above system (3.22)–(3.24) reduces to (in the $mR \ll 1$ limit)

$$\frac{\lambda'_1}{R} + \frac{\lambda_1}{R^2} = -\frac{m^2}{2}(3\mu_1 + R\mu'_1) \quad (3.25)$$

$$\frac{\nu'_1}{R} - \frac{\lambda_1}{R^2} = m^2\mu_1 \quad (3.26)$$

$$\frac{\lambda_1}{R^2} = \frac{\nu'_1}{2R} + Q(\mu_0), \quad (3.27)$$

with $Q(\mu_0) \equiv Q_b(0, 0, \mu_0)$. For the interaction terms of eq. (2.4) and (2.5), we find respectively (see the expressions given in appendix B)

$$Q^{(2)}(\mu) = \frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu\mu''}{2} + \frac{2\mu\mu'}{R} \quad (3.28)$$

$$Q^{(3)}(\mu) = -Q^{(2)}(\mu). \quad (3.29)$$

In the general case one can show (cf. appendix B) that $Q(\mu)$ is given by

$$Q^{(\alpha,\beta)}(\mu) = -\frac{1}{2R} \left\{ 3\alpha \left(6\mu\mu' + 2R\mu'^2 + \frac{3}{2}R\mu\mu'' + \frac{1}{2}R^2\mu'\mu'' \right) + \beta \left(10\mu\mu' + 5R\mu'^2 + \frac{5}{2}R\mu\mu'' + \frac{3}{2}R^2\mu'\mu'' \right) \right\}, \quad (3.30)$$

where α and β are numerical constants depending on the interaction term $S_{int}[f, g]$.

We can eliminate λ_1 and ν_1 from the above system (3.25)–(3.27) to get an equation for μ_1

$$3Q(\mu_0) + rQ'(\mu_0) = -\frac{3}{4}m^2 (3\mu_1 + R\mu_1').$$

Hence, gathering the linear and quadratic terms in the G_N expansion, we find

$$\nu = -\frac{\bar{R}_S}{R} + \frac{\bar{R}_S^2}{R^2} \frac{n_1}{(mR)^4} + \mathcal{O}(\bar{R}_S^3) \quad (3.31)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{\bar{R}_S}{R} + \frac{\bar{R}_S^2}{R^2} \frac{l_1}{(mR)^4} + \mathcal{O}(\bar{R}_S^3) \quad (3.32)$$

$$\mu = \frac{1}{2(mR)^2} \frac{\bar{R}_S}{R} + \frac{\bar{R}_S^2}{R^2} \frac{m_1}{(mR)^6} + \mathcal{O}(\bar{R}_S^3) \quad (3.33)$$

where n_1 , m_1 and l_1 are order one dimensionless quantities that depend on the details of the quadratic term $Q(\mu_0)$, and \bar{R}_S is the Schwarzschild radius defined as usual from the "Cavendish" Newton constant \bar{G}_N (defined as the one which is measured in some Cavendish-like experiment, assuming the Newtonian potential is given at leading order by the first term in the right hand side of equation (3.31)). To obtain the expressions (3.31)–(3.33) above, we have fixed the integration constant C_1 such that the Newtonian force between non relativistic pointlike bodies matches the one obtained in Newtonian theory (assuming those bodies are separated by a distance much larger than the Vainshtein radius and much smaller than the graviton Compton wavelength). As we said above, this requires defining the Newton constant \bar{G}_N as $4/3$ of G_N ,¹² as defined by equation eq. (2.2). We also see the vDVZ discontinuity in the fact that the coefficient in front of \bar{R}_S/R in the first term on the right hand side of (3.32) is not equal to one (as it would be in GR). Finally, we see that this expansion is only valid for $R \gg R_V$ where R_V is the Vainshtein radius defined as in (3.11).

3.2.4 Small R expansion

At small R , $R \ll R_V$, following Vainshtein's idea, one is looking for an expansion around solutions of usual General Relativity. In other words, one looks for an expansion in power of the mass of the graviton (squared) m^2 and expands the functions λ, ν, μ as in

$$f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} m^{2n} f_n(R),$$

¹²So that we have also $\bar{R}_S = 4/3 R_S$, where R_S is the Schwarzschild radius used in the rest of this paper.

where the f_n are m -independent coefficients. By definition, the lowest order expressions of λ and ν are given by the Schwarzschild form

$$\lambda_0 = -\nu_0 = -\ln\left(1 - \frac{R_S}{R}\right) = \frac{R_S}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{R_S}{R}\right)^2 + \dots \quad (3.34)$$

Keeping the lowest order term in R_S/R , λ_0 and ν_0 are simply obtained by solving the vacuum linearized Einstein equations

$$\begin{aligned} \frac{\lambda'_0}{R} + \frac{\lambda_0}{R^2} &= 0 \\ \frac{\nu'_0}{R} - \frac{\lambda_0}{R^2} &= 0. \end{aligned}$$

The function μ_0 is found using the Bianchi equation (3.17)

$$\frac{\lambda_0}{R^2} = \frac{\nu'_0}{2R} + Q(\mu_0),$$

where only the lowest order terms have been kept. Inserting in the above equation the GR solution (3.34), we find that one should have

$$Q(\mu_0) = \frac{R_S}{2R^3}, \quad (3.35)$$

where the lowest order in R_S/R has been kept. Assuming, following Vainshtein, that μ_0 can be expanded as a power of R , we find that the first non trivial term should be of the form

$$\begin{aligned} \mu_0 &= M_0 \sqrt{R_S/R}, \\ &\gg \lambda_0, \nu_0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

where M_0 is a pure number. Hence, there is a first potential obstruction to the success of the Vainshtein mechanism [12], namely the left hand side of equation (3.35) must be positive definite, which is only possible for particular quadratic terms $Q(\mu_0)$. e.g. the interaction term (2.4) leads via equation (3.35) to an imaginary M_0 and hence, for this potential the scaling proposed by Vainshtein does not work (see however below). In contrast, from the interaction term (2.5) (and hence equation (3.29)), one finds the real value $M_0 = \pm\sqrt{8/9}$.

The next order for λ_1 and μ_1 is given by solving equations (3.15)–(3.16). In the limit where

$$R_S \ll R \ll m^{-1},$$

taking into account the scaling (3.36), those equations simply reduce to

$$\begin{aligned} \frac{\lambda'_1}{R} + \frac{\lambda_1}{R^2} &= -\frac{m^2}{2}(3\mu_0 + R\mu'_0) \\ \frac{\nu'_1}{R} - \frac{\lambda_1}{R^2} &= m^2\mu_0, \end{aligned}$$

while μ_1 is obtained solving the Bianchi identity (3.17) which reduces, in the limit considered, to

$$\frac{\lambda_1}{R^2} - \frac{\nu_1'}{2R} = Q_b(0, 0, \mu_0 + \mu_1),$$

where in the right hand side of the above equation only the term linear in μ_0 and μ_1 are kept (cross products). Eventually, we obtain an expansion of the form found by Vainshtein given by

$$\nu = -\frac{R_S}{R} + N_1 (mR)^2 \sqrt{\frac{R_S}{R}} + \mathcal{O}(m^4), \quad (3.37)$$

$$\lambda = \frac{R_S}{R} + L_1 (mR)^2 \sqrt{\frac{R_S}{R}} + \mathcal{O}(m^4), \quad (3.38)$$

$$\mu = M_0 \sqrt{\frac{R_S}{R}} + M_1 (mR)^2 + \mathcal{O}(m^4), \quad (3.39)$$

where again M_0 , N_1 , L_1 and M_1 are order one dimensionless numbers. This expansion makes sense only if $m^2 \mathcal{O}\left(R^2 \sqrt{\frac{R_S}{R}}\right) \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{R_S}{R}\right)\right] \ll \frac{R_S}{R} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{R_S}{R}\right)\right]$, i.e., if $R \lesssim R_V = (m^{-4} R_S)^{1/5}$.

Note however that there is another possible expansion at small R that has not been discussed previously in the literature and for which one also recovers the GR solution. Indeed, the operator Q , appearing on the left hand side of equation (3.35), can have a zero mode in the form of a power law, $\mu_Q \propto R^p$, and one can find an expansion for μ starting with this zero mode. e.g. in the cases of interaction terms (2.4) and (2.5), where the corresponding operators Q are given by equations (3.28) and (3.29), one finds $p = -2$, and hence in those cases, as we will discuss in more details in the next section (together with a discussion of the most general case) it is possible to find a solution to equation (3.35) in the form

$$\mu_0 = (mR_S)^{2/5} \left(A_0 \left(\frac{R_V}{R} \right)^2 - \frac{s}{3A_0} \frac{R}{R_V} \log(R/R_V) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{R}{R_V}\right), \quad (3.40)$$

where $s = -1$ for the potential (2.4) and $s = +1$ for the potential (2.5), and A_0 is a pure number. Such an expansion will in fact, as will be shown in the next section, turn out to be the most general one found by numerical integration of the equations of motion in vacuum.

3.2.5 Matching small R and large R behaviours

It was noticed immediately after the seminal work of Vainshtein that there was no warranty that one could match the solution found by Vainshtein in the small R limit, given by equations (3.37)–(3.39), to the one obtained in the large R limit, and given by equations (3.31)–(3.33) [11]. More recently, numerical integration of the full (nonlinear) system of equations (3.15)–(3.17) has shown indeed [12] (see also [13]), that integrating inwards from the large R behaviour (3.31)–(3.33) or outwards, from the small R behaviour, always results in singularities appearing at finite R (provided one insists upon the solution to be asymptotically flat). In fact the exact reason for which those singularities arise has not

been clarified so far in the literature and it is one of the main purpose of this work to reexamine this question in the light of the Goldstone formalism in the decoupling limit of ref. [18]. The general understanding is that one can link those singularities, and hence the failure of the Vainshtein mechanism, to the ghost-like nature of the extra degree of freedom discovered by Boulware and Deser [11] to be present in the nonlinear theory, and, as recalled above, appearing in the Goldstone formalism in the form of higher derivative operators [16, 17].

4 The decoupling limit in spherically symmetric solutions

In this section we study static spherically symmetric solutions in the decoupling limit (DL in the following). We first show (section 4.1.1) how to obtain a DL in the case of the static spherically symmetric ansatz (3.3). We then show (4.1.2) that this DL is in fact analogous to the one introduced in section 2.3 and we show the scalar field ϕ is closely related to the metric function μ of the gauge (3.3). We give the explicit link between the two and show that in the decoupling limit, both fields obey the same equation of motion. The DL allows to decouple the scalar degree of freedom, which appears due to the presence of the potential term, from the degrees of freedom also present in GR. In this limit, the study of solutions is greatly simplified, in particular, instead of three equations of motion (3.15)–(3.17) there will be only one (nonlinear) equation for the “gauge” function μ (or equivalently for ϕ). This is consistent with the fact that by extracting the DL the GR degrees of freedom become decoupled from the scalar degrees of freedom.

On the other hand, one can hope that the DL will contain the main features of the full system, since it isolates the “troublesome” scalar degrees of freedom. For example, the large- R asymptotic solution and the Vainshtein solution of the full system have DL analogues. On the other hand, as was recalled at the end of the previous section, the Vainshtein mechanism was found to fail for the theory considered here, by integrating the full nonlinear system of equations (3.15)–(3.17). Thus a natural question to ask is whether one can already see this failure in the DL. In the section 4.1.3, we discuss briefly the expected range of validity of the DL.

The main results of this section are obtained in section 4.2 where we solve numerically the DL equations of motion. After a discussion of boundary conditions at infinity (subsection 4.2.1), we first introduce a simple linear differential equation which shares some crucial properties with the one obtained in the DL (subsection 4.2.2). Then we discuss solutions outside the source and inside the source in the simplest cases of potential (2.4) and (2.5) (subsections 4.2.3 and 4.2.4). Last, we turn to discuss the most general case (subsection 4.2.5).

4.1 Extracting the limit

4.1.1 Rescaling and limiting equations of motion

First, let us note, as should be clear from the derivations presented in section 3.2, that both the expansion in the Newton constant (in the limit where $R \ll m^{-1}$) as given by equations (3.31)–(3.33) and the expansion in the mass of the graviton (in the limit where

$R \gg R_S$) as given by equations (3.37)–(3.39) (as well as (3.40)) are left unchanged if one first does the rescaling on the metric functions,

$$\begin{aligned}\tilde{\nu} &\equiv M_P \nu, \\ \tilde{\lambda} &\equiv M_P \lambda, \\ \tilde{\mu} &\equiv m^2 M_P \mu,\end{aligned}\tag{4.1}$$

and on the components of the energy-momentum tensor

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} &\equiv \rho/M_P, \\ \tilde{P} &\equiv P/M_P,\end{aligned}$$

and then takes the DL as it is defined in (2.23). More precisely, plugging the rescaled functions $\tilde{\nu}$, $\tilde{\lambda}$ and $\tilde{\mu}$ into the equations of motion (3.15)–(3.17), and assuming those functions to be bounded, one sees that in the DL (2.23), the nonlinear system of equations (3.15)–(3.17) collapses to the much simpler one

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\lambda}'}{R} + \frac{\tilde{\lambda}}{R^2} &= -\frac{1}{2}(3\tilde{\mu} + R\tilde{\mu}') + \tilde{\rho} \\ \frac{\tilde{\nu}'}{R} - \frac{\tilde{\lambda}}{R^2} &= \tilde{\mu} \\ \frac{\tilde{\lambda}}{R^2} &= \frac{\tilde{\nu}'}{2R} + \frac{Q(\tilde{\mu})}{\Lambda^5}\end{aligned}\tag{4.2}$$

where Λ is defined as in (2.20). So the only non linearities which remain in this limit are those corresponding to the piece of the Bianchi identity quadratic in μ . Note that we have set the pressure \tilde{P} to zero in the above equations (4.2), since this is a direct consequence of taking the decoupling limit in the matter conservation equation (3.13):

$$\tilde{P}' = -\frac{\tilde{\nu}'}{2M_P} (\tilde{\rho} + \tilde{P}) \rightarrow 0 \quad \text{when} \quad M_P \rightarrow 0.\tag{4.3}$$

It is easy to extract from the above system (4.2) a single equation obeyed by $\tilde{\mu}$ reading

$$\frac{1}{\Lambda^5} [6Q(\tilde{\mu}) + 2RQ(\tilde{\mu})'] + \frac{9}{2}\tilde{\mu} + \frac{3}{2}R\tilde{\mu}' = \tilde{\rho}.\tag{4.4}$$

As we will see in the next subsection, one can map this equation to the equation of motion found for $\tilde{\phi}$, equation (2.25), and hence there is a very clear relation between the decoupling limit as we just defined, obtained from the equations of motions in the λ, μ, ν gauge, and the one discussed in the original reference [18] as summarized in section 2.3. Before turning to discuss in detail this relation, let us first note that equation (4.4) can easily be integrated once leading to the first integral

$$\frac{2}{\Lambda^5} Q(\tilde{\mu}) + \frac{3}{2}\tilde{\mu} = \frac{C_2}{R^3} + \frac{1}{R^3} \int_0^R d\tilde{R} \tilde{\rho}(\tilde{R}) \tilde{R}^2\tag{4.5}$$

where C_2 is an integration constant. Notice that outside the source, the integral on the right hand side of equation (4.5) gives a constant and hence this simply results in a shift of the integration constant C_2 to yield

$$\frac{2}{\Lambda^5}Q(\tilde{\mu}) + \frac{3}{2}\tilde{\mu} = \frac{C_0}{R^3}. \quad (4.6)$$

As usual, the integration constant C_0 should be fixed by matching to the source. The two limiting regimes discussed in section 3.2 are easily recovered from this equation. The lowest order term in the expansion into the Newton constant (valid at $R \gg R_V$) corresponds to keeping only the linear order in $\tilde{\mu}$ in the left hand side of (4.6), recovering equation (3.20). The lowest order term in the expansion in m^2 (valid at $R \ll R_V$) corresponds to keeping only the quadratic term $Q(\tilde{\mu})$ in the left hand side of (4.6), recovering the scaling $\mu \sim \mathcal{O}(\sqrt{R_S/R})$ found in equation (3.39). Assuming the validity of the Vainshtein recovery mechanism, one can easily fix the (shifted) integration constant C_0 for a point like source, by using the known form of the functions $\tilde{\nu}$ and $\tilde{\lambda}$ at lowest order in the m^2 expansion which is given by their expressions in standard General Relativity (at lowest order in R_S/R). This fixes that, in this limit (see e.g. equation (3.35)),

$$\frac{2}{\Lambda^5}R^3Q(\tilde{\mu}) \rightarrow M_P R_S, \quad (4.7)$$

and hence,

$$C_0 = M_P R_S. \quad (4.8)$$

Note that the above equations (4.5)–(4.6) take their most simple expressions when Q is given as in equations (3.28)–(3.29), i.e. for the interaction terms (2.4) and (2.5), in which case e.g. equation (4.6) reads

$$-\frac{s}{\Lambda^5} \left(\frac{\tilde{\mu}'^2}{2} + \tilde{\mu}\tilde{\mu}'' + \frac{4\tilde{\mu}\tilde{\mu}'}{R} \right) + \frac{3}{2}\tilde{\mu} = \frac{C_0}{R^3}, \quad (4.9)$$

where again $s = -1$ for the BD interaction term (2.4) and $s = +1$ for the AGS mass term (2.5). For future use, and for numerical integration, it turns out convenient to introduce the dimensionless quantities

$$\begin{aligned} \xi &\equiv R/R_V, \\ \rho_a &\equiv 4\pi \frac{R_V^3}{M} \rho, \\ w(\xi) &\equiv a^{-2} \mu, \\ v(\xi) &\equiv a^{-4} \nu, \\ u(\xi) &\equiv a^{-4} \lambda, \end{aligned}$$

where we used the dimensionless parameter

$$a \equiv R_V m = (R_S m)^{1/5}.$$

The functions u and v are just the dimensionless functions λ and ν associated with the $g_{\mu\nu}$ metric, while w corresponds to μ , and ξ is the dimensionless distance R expressed in unit of the Vainshtein radius R_V . In term of these quantities, the system (4.2) reads

$$\begin{aligned}\frac{\dot{u}}{\xi} + \frac{u}{\xi^2} &= -\frac{1}{2}(3w + \xi\dot{w}) + \rho_a \\ \frac{\dot{v}}{\xi} - \frac{u}{\xi^2} &= w \\ \frac{u}{\xi^2} &= \frac{\dot{v}}{2\xi} + Q(w),\end{aligned}$$

where a dot denotes a derivative with respect to ξ . Eliminating u and v from the above system, we get the analogous of eq. (4.6) for the rescaled variable w

$$2 Q(w) + \frac{3}{2}w = \frac{c_0}{\xi^3}, \quad (4.10)$$

where c_0 is defined by

$$c_0 = \frac{C_0}{R_V^5 \Lambda^5}.$$

Fixing the integration constant as in (4.8), leads to $c_0 = 1$, and the equation for w now reads

$$2 Q(w) + \frac{3}{2}w = \frac{1}{\xi^3}, \quad (4.11)$$

which will be assumed from here-on and until the end of this article. The general form of Q can be read from equation (3.30), R being replaced by ξ and μ by w . It is given by

$$\begin{aligned}Q(w) = -\frac{1}{2} \Bigg\{ & 3\alpha \left(\frac{\xi}{2} \dot{w} \ddot{w} + \frac{3}{2} w \ddot{w} + 2\dot{w}^2 + \frac{6w\dot{w}}{\xi} \right) \\ & + \beta \left(\frac{3\xi}{2} \dot{w} \ddot{w} + \frac{5}{2} w \ddot{w} + 5\dot{w}^2 + \frac{10w\dot{w}}{\xi} \right) \Bigg\}. \quad (4.12)\end{aligned}$$

E.g., in the simplest case of the potentials leading to equation (4.9), one has $\alpha + \beta = 0$ and equation (4.11) reads

$$-s \left(\frac{\dot{w}^2}{2} + w \ddot{w} + 4 \frac{w\dot{w}}{\xi} \right) + \frac{3}{2}w = \frac{1}{\xi^3}. \quad (4.13)$$

We now turn to compare the above obtained equations for $\tilde{\mu}$ (or w), eq. (4.10), with the equation of motion of $\tilde{\phi}$.

4.1.2 Comparison with the Goldstone picture

The most general equation of motion for $\tilde{\phi}$, eq. (2.25), can be rewritten in the following form involving a total derivative

$$\nabla_\mu \left\{ 3\Lambda^5 \nabla^\mu \tilde{\phi} + 3\alpha \nabla^\mu \left(\square \tilde{\phi} \right)^2 + \beta \nabla^\mu \left(\tilde{\phi}_{;\delta\gamma} \right)^2 + 2\beta \nabla^\nu \left(\square \tilde{\phi} \tilde{\phi}^{;\mu}_\nu \right) \right\} = \frac{\Lambda^5}{M_P} T.$$

Hence, it is easy to see that, in the case of a spherically symmetric configuration $\tilde{\phi}(R)$, this equation can always be integrated once to yield

$$\begin{aligned} 3 \frac{\tilde{\phi}'}{R} + \frac{2}{\Lambda^5} \left\{ 3\alpha \left(-4 \frac{\tilde{\phi}'^2}{R^4} + 2 \frac{\tilde{\phi}' \tilde{\phi}''}{R^3} + 2 \frac{\tilde{\phi}''^2}{R^2} + 2 \frac{\tilde{\phi}' \tilde{\phi}^{(3)}}{R^2} + \frac{\tilde{\phi}'' \tilde{\phi}^{(3)}}{R} \right) + \right. \\ \left. + \beta \left(-6 \frac{\tilde{\phi}'^2}{R^4} + 2 \frac{\tilde{\phi}' \tilde{\phi}''}{R^3} + 4 \frac{\tilde{\phi}''^2}{R^2} + 2 \frac{\tilde{\phi}' \tilde{\phi}^{(3)}}{R^2} + 3 \frac{\tilde{\phi}'' \tilde{\phi}^{(3)}}{R} \right) \right\} \\ = -\frac{\tilde{C}_2}{R^3} - \frac{1}{R^3} \int_0^R d\tilde{R} \tilde{\rho}(\tilde{R}) \tilde{R}^2, \end{aligned} \quad (4.14)$$

where we used that, according to eq. (4.3), $T/M_P = -\tilde{\rho}$ in the decoupling limit, and where \tilde{C}_2 is an integration constant. Let us now see how this equation compares with equation (4.5) obtained for $\tilde{\mu}$ in the previous subsection. As we have seen, the relation between the unitary gauge (3.2) and the gauge (3.5) is encoded into the function $\mu(R)$ though the coordinate change (3.7). On the other hand, it is also contained in the Goldstone field π^A , and in our case, in a single scalar field ϕ defined as in (2.15)–(2.16) by

$$\eta^{AB} \partial_B \phi = X^A(x^\mu) - \delta_\mu^A x^\mu, \quad (4.15)$$

where as follows from (3.7) X^A and x^μ are given by $\{X^A\} = \{t, x, y, z\}$ and $\{x^\mu\} = \{t, X, Y, Z\}$, and $X^A(x^\mu)$ is given by the coordinate change (3.7). It is easy to see that equation (4.15) has the solution $\phi(R)$

$$\phi' \equiv \partial_R \phi = R \left(e^{-\frac{\mu(R)}{2}} - 1 \right), \quad (4.16)$$

and that in this particular case no vector field A^B is needed. Note that the relation between μ and ϕ is in fact "non perturbative" because of the presence of the exponential in the above relation. The limiting conditions (3.10) translate via relation (4.16) into

$$\lim_{R \rightarrow 0} \phi'(R) = 0. \quad (4.17)$$

This is precisely the limiting condition one would impose on a scalar field ϕ in a spherically symmetric configuration in order to have everywhere well defined second derivatives. For small μ , the above expression (4.16) can be expanded as

$$\phi' \equiv \partial_R \phi = -R \left(1 - e^{-\frac{\mu(R)}{2}} \right) \sim -\frac{R\mu}{2} + \frac{R\mu^2}{8} + \dots$$

If we go to the canonically normalized $\tilde{\phi}$, defined in equation (2.19), and use the rescaled metric variables as defined in (4.1), and then take the decoupling limit (2.23), one is left with the simple relation between $\tilde{\phi}$ and $\tilde{\mu}$ given by

$$\tilde{\mu} = -\frac{2}{R} \tilde{\phi}'. \quad (4.18)$$

Substituting $\tilde{\phi}'$ in the equation (4.14) we get then

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\tilde{\mu} - \frac{1}{R\Lambda^5} \left\{ 3\alpha \left(6\tilde{\mu}\tilde{\mu}' + 2R\tilde{\mu}'^2 + \frac{3}{2}R\tilde{\mu}\tilde{\mu}'' + \frac{1}{2}R^2\tilde{\mu}'\tilde{\mu}'' \right) \right. \\ \left. + \beta \left(10\tilde{\mu}\tilde{\mu}' + 5R\tilde{\mu}'^2 + \frac{5}{2}R\tilde{\mu}\tilde{\mu}'' + \frac{3}{2}R^2\tilde{\mu}'\tilde{\mu}'' \right) \right\} = \frac{\tilde{C}_2}{R^3} + \frac{1}{R^3} \int_0^R d\tilde{R} \tilde{R}^2 \tilde{\rho}(\tilde{R}), \end{aligned}$$

and we recover exactly equation (4.5) (identifying \tilde{C}_2 and C_2). It is however interesting to note that the boundary condition (4.17) can be lost in the decoupling limit due to the "non perturbative" (exact) relation between ϕ and μ given by equation (4.16). For example, if one considers the field theory defined by action (2.24) and looks for a spherically symmetric solution, one is led to impose that $\tilde{\phi}'(0)$ vanishes. This, via relation (4.18) imposes however a condition on $\tilde{\mu}$ which is not necessary considering the conditions given at the end of section 3.1.

4.1.3 Expected range of applicability of the Decoupling Limit

We would like here to discuss to what extent the DL is capturing the leading behaviour of the solution of the full nonlinear system. As we will see, the DL is expected to be valid for distances in-between the Compton length of graviton m^{-1} , and a scale that is parametrically lower than the Vainshtein radius and can even reach the Schwarzschild radius.

First, as should be clear from the discussion of section 3.2.3, the DL should give a good description of the solution at least in the range $R_V \leq R \ll m^{-1}$. Another way to check this is to look more carefully at the expressions (2.21). Indeed, it is easy to check that the quadratic, cubic and quartic non derivative self interactions (2.21) (with appropriate values of k_1, k_2, k_3, k_4) do not give significant corrections to the DL solutions for $R_V \leq R \ll m^{-1}$, while the cubic derivative $\tilde{\phi}$ self interaction is retained in the DL. Comparing the other interactions (2.21) to the kinetic terms in the regime where the linearized theory is expected to hold (i.e. for $R \gg R_V$), one sees that those interactions have each their own "Vainshtein" radii (corresponding to distances where those interactions generate $\mathcal{O}(1)$ correction to the linearized theory) which are strictly smaller than R_V , as first noted in ref. [18]. Those radii are sent to zero in the DL, while R_V is kept unchanged.

Let us now discuss what is going on at distances smaller than R_V . Using again the expressions (2.21), it is easy to see that the quadratic, cubic and quartic non derivative self interactions stay negligible at least up to R_S , while one can estimate when the other interactions become of the same order as the cubic interaction retained in the DL. Indeed, the Vainshtein scaling (3.37)–(3.39) translates into the scaling $h \sim R_S/R$, $\partial\partial\phi \sim \mu \sim \sqrt{R_S/R}$ (via eq. (4.16)), and $A \sim 0$. From which one easily obtains the scaling of the canonically normalized fields \tilde{h} , $\tilde{\phi}$, and \tilde{A} . Inserting this into eq. (2.21) we see that a generic interaction (2.21) is much smaller than the cubic $\tilde{\phi}$ all the way down to the Schwarzschild radius R_S . Hence, as discussed in ref. [16], assuming the Vainshtein scaling, one expects the DL to be correctly describing the solution of the full nonlinear theory below m^{-1} and down to R_S . The same question can be asked for the other scaling introduced above in eq. (3.40). For this scaling, and below the Vainshtein radius, one still have $h \sim R_S/R$,

while we have $\partial\partial\phi \sim \mu \sim m^2 R_V^4 R^{-2}$. To estimate the range of validity of the leading behaviour of the DL solution, one has to pay attention to the fact that the leading term in eq. (3.40) is a zero mode of the kinetic operator associated with the cubic term in the action of the DL. This kinetic operator, evaluated on this leading behaviour, is a sum of three terms which add to zero (see e.g. eq. (4.9)). Hence, one expects to see the solution leave the found DL behaviour whenever the left over interactions (2.21) generates a term in the equation of motion larger than, or of the order of, any of those three terms. For a generic interaction (2.21) this happens below the radius R_{k_1, k_3, k_4} defined by

$$R_{k_1, k_3, k_4} = R_V (R_S m)^{\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \frac{3k_1 + 4k_4}{k_1 + 2k_3 - 6}}. \quad (4.19)$$

Again we see that this scale is always parametrically smaller than the Vainshtein Radius, whenever $k_1 + 2k_3 - 6$ is strictly positive. When this latter condition is not fulfilled, it is also easy to see that the neglected interactions are then always subdominant with respect to the cubic self interaction retained by the DL for $R \leq R_V$. Hence, for the scaling (3.40), we expect as well the DL to give the leading behaviour of the solution of the full nonlinear system (if it exists) for distances below the Vainshtein radius and above the largest of the scales R_{k_1, k_3, k_4} which is simply $R_V \times a$.

4.2 Solving the decoupling limit equation of motion

4.2.1 Behaviour and boundary conditions at infinity

As we have just demonstrated, in the decoupling limit, one is left with the single nonlinear differential equation (4.11) to be solved with appropriate boundary conditions. Note, that in the simple case of BD and AGS potentials (respectively potentials (2.4) and (2.5)), equation (4.11) (taking then the simpler form (4.13)) can be put in the well studied form (with obvious notation), encompassing in particular the six Painlevé transcendents

$$\ddot{w} = F(w, \xi) \dot{w}^2 + G(w, \xi) \dot{w} + H(w, \xi).$$

However, one can easily check that the functions F , G , and H above are such that the movable singularities of this equation are not only polar and even in this case solutions are not known analytically, hence one has to use a numerical integration in order to solve the equation of motion (4.11).

This equation being of second order, we have to specify two initial conditions, $w(\xi_i)$ and $\dot{w}(\xi_i)$ at some point ξ_i to start numerical integration from there. In our case, however, it is natural to start the integration from infinity, since we know the asymptotic behaviour of w there. Indeed, at infinity, i.e. large ξ (or large R) regime, we are looking for a solution of equation (4.11) which has the asymptotic behaviour given by dropping all the nonlinearities. Hence it should behave at large ξ as

$$w(\xi) \sim w_\infty(\xi), \quad (4.20)$$

where $w_\infty(\xi)$ is defined by

$$w_\infty(\xi) \equiv \frac{2}{3\xi^3}. \quad (4.21)$$

This behaviour can then be used to integrate inward the equation of motion starting from the initial conditions

$$w(\xi_i) = w_\infty(\xi_i), \quad (4.22)$$

$$\dot{w}(\xi_i) = \dot{w}_\infty(\xi_i).$$

Taking a sufficiently large ξ_i , $\xi_i \gg 1$, we may hope that a solution we obtain by numerical integration will be close to the true solution (if it exists) of eq. (4.11) with the asymptotic behaviour $w(\xi) \rightarrow w_\infty(\xi)$ as $\xi \rightarrow \infty$.

Things are slightly simpler in the case of equation (4.13) corresponding to the BD and AGS potentials (2.4) and (2.5). Indeed, in this case, the change of variable

$$\Xi_\infty = \xi^{-3}, \quad (4.23)$$

$$W_\infty = [w(\xi)]^{3/2}, \quad (4.24)$$

puts the differential equation (4.13) in the form

$$sW_\infty'' - \frac{W_\infty^{1/3}}{4\Xi_\infty^{8/3}} + \frac{1}{6\Xi_\infty^{5/3}W_\infty^{1/3}} = 0. \quad (4.25)$$

In this form, the first term in the left hand side above stands for all the term quadratic in w in equation (4.11) (i.e the terms in Q), the second term represent the term linear in w and the last term encodes the source. The boundary conditions (4.20)–(4.21) translate into the Cauchy initial values at 0

$$\begin{aligned} W_\infty(0) &= 0 \\ W_\infty'(0) &= 0, \end{aligned} \quad (4.26)$$

while the asymptotic behaviour at $\Xi_\infty \rightarrow 0$ is obtained now by dropping the second derivative of W_∞ in the above equation (4.25) and reads

$$W_\infty \sim \left(\frac{2}{3} \Xi_\infty \right)^{3/2}.$$

In this simpler case, one sees clearly a crucial property of our problem, that holds also in the most general case (4.11), namely the Cauchy problem (4.25)–(4.26) (or (4.11) together with the asymptotic behaviour (4.20)) is a singular Cauchy problem, since the differential operator of equation (4.25) is obviously singular in $(W_\infty, \Xi_\infty) = (0, 0)$. As a result, one can not use standard theorems on Cauchy problem to conclude anything on the existence of a solution. Before turning to discuss solutions of our equation (4.11), we first discuss in the following subsection a simple linear differential equation with a similar singular Cauchy problem to illustrate some crucial properties also found in our solving of equation (4.11).

4.2.2 A simple singular Cauchy problem

Consider the following second-order differential equations:

$$y''(x) + y(x) = \frac{1}{x}, \quad (4.27)$$

$$-y''(x) + y(x) = \frac{1}{x}. \quad (4.28)$$

These equations are singular at infinity similarly to eq. (4.11). The term $y(x)$ and $1/x$ correspond respectively to the term linear in w and the source term $1/\xi^3$, while the second derivative of y can be related to the nonlinear differential operator Q . Aside from the fact the differential operator of equation (4.27) and (4.28) is linear, those equation have the same structure as equation (4.11). The solution of (4.27) is given by

$$y_1(x) = \bar{C}_1 \cos(x) + \bar{C}_2 \sin(x) + \text{Ci}(x) \sin(x) - \text{Si}(x) \cos(x), \quad (4.29)$$

and the solution of (4.28) is

$$y_2(x) = \bar{C}_1 e^x + \bar{C}_2 e^{-x} - \frac{1}{2} (e^x \text{Ei}(-x) - e^{-x} \text{Ei}(x)). \quad (4.30)$$

In eq. (4.29) and (4.30), \bar{C}_1 and \bar{C}_2 are arbitrary constants, and $\text{Si}(x)$, $\text{Ci}(x)$ and $\text{Ei}(x)$ are sine integral, cosine integral and exponential integral functions correspondingly, given by

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad \text{Ci}(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt, \quad \text{Ei}(x) = - \int_{-x}^\infty \frac{\exp(-t)}{t} dt.$$

Now let us find solution(s) of (4.27) and (4.28) such that,

$$y_{1,2}(x) \rightarrow \frac{1}{x}, \text{ when } x \rightarrow \infty. \quad (4.31)$$

This correspond, *mutatis mutandis*, to the asymptotic at infinity, eq. (4.21). There is a unique solution of (4.27) with the asymptotic (4.31),

$$y_1(x) = \frac{\pi}{2} \cos(x) + \text{Ci}(x) \sin(x) - \text{Si}(x) \cos(x), \quad (4.32)$$

while for the equation (4.28) the asymptotic behaviour (4.31) does not fix uniquely the solution,

$$y_2(x) = \bar{C}_2 e^{-x} - \frac{1}{2} (e^x \text{Ei}(-x) - e^{-x} \text{Ei}(x)). \quad (4.33)$$

i.e. one has the freedom to choose at will the integration constant \bar{C}_2 . Solution (4.32) has the following asymptotic expansion

$$y_1(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{24}{x^5} - \frac{720}{x^7} + O\left(\frac{1}{x^9}\right),$$

while looking for a power serie expansion of solution (4.33), we find

$$y_2(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{24}{x^5} + \frac{720}{x^7} + O\left(\frac{1}{x^9}\right).$$

Those series expansions are in fact divergent, and hence only give at best asymptotic expansions of the solution, however we notice that the last one misses the existence of the homogeneous mode $\bar{C}_2 e^{-x}$. One can nonetheless easily see that the solutions (4.32) and (4.33) are in fact finite and they give the correct asymptotic (4.31) at the infinity.

The toy examples (4.27) and (4.28) show that for singular equations, the asymptotic behaviour at infinity can be enough to fix uniquely the solution (and hence the singular Cauchy problem is well-posed), this is the case for example of eq. (4.27); while in other cases, such as that of eq. (4.28), there exist a family of solutions with the same asymptotic behaviour, which can be missed by looking for the solution by a power serie expansion. The properties summarized in this last paragraph are exactly recovered for our equation (4.11), as we now see, beginning by discussing the simplest case of BD and AGS potentials.

4.2.3 Solutions for the BD and AGS potentials outside the source

In the case of the BD and AGS potentials (of eq. (2.4) and (2.5) respectively), the nonlinear differential equation to solve takes the simple form (4.13). In those cases, it is easy to find a power serie expansion of the solution around $\xi = +\infty$ in the form

$$w(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_n}{\xi^{3+5n}}. \quad (4.34)$$

The first non trivial six w_n coefficients, are given by

$$w(\xi) = \frac{2}{3\xi^3} + s\frac{4}{3\xi^8} + \frac{1024}{27\xi^{13}} + s\frac{712960}{243\xi^{18}} + \frac{104910848}{243\xi^{23}} + s\frac{225030664192}{2187\xi^{28}} + \dots \quad (4.35)$$

Note that the first two terms of this series match those given in equation (3.33), and in fact this expansion is just the continuation of the one given in this equation. One can check numerically that this power series is in fact divergent. However we found it useful for the purpose of numerical integration to use this expansion as an asymptotic expansion of the solutions. Indeed it provides a better approximation of the solution than keeping only the leading order (4.22), provided that we truncate the expansion at the appropriate order.¹³ In both cases of BD and AGS potentials, we were able to integrate numerically inwards equation (4.13) and obtain non singular solutions all the way to small radii. Our results are shown in figures 1 and 3.

These numerical solutions exhibit different behaviours at small ξ which can be understood as we now explain. First, if, following Vainshtein, we assume that we can drop the term linear in w in equation (4.13), the leading behaviour should be given by a solution of the equation

$$2Q(w) = \frac{1}{\xi^3},$$

¹³I.e., as usual with asymptotic expansions, for any given ξ_i from which we want to integrate inwards, there is an order n that minimizes the n -th term w_n/ξ^{3+5n} of the series (4.34), and we found it helpful to use the formal series truncated at this order $n^{(\xi)}$, i.e. to replace the initial conditions (4.22) by

$$\begin{aligned} w(\xi_i) &= \sum_{k=0}^{n^{(\xi_i)}} \frac{w_k}{\xi^{3+5k}}, \\ \dot{w}(\xi_i) &= \frac{d}{d\xi} \left(\sum_{k=0}^{n^{(\xi_i)}} \frac{w_k}{\xi^{3+5k}} \right). \end{aligned} \quad (4.36)$$

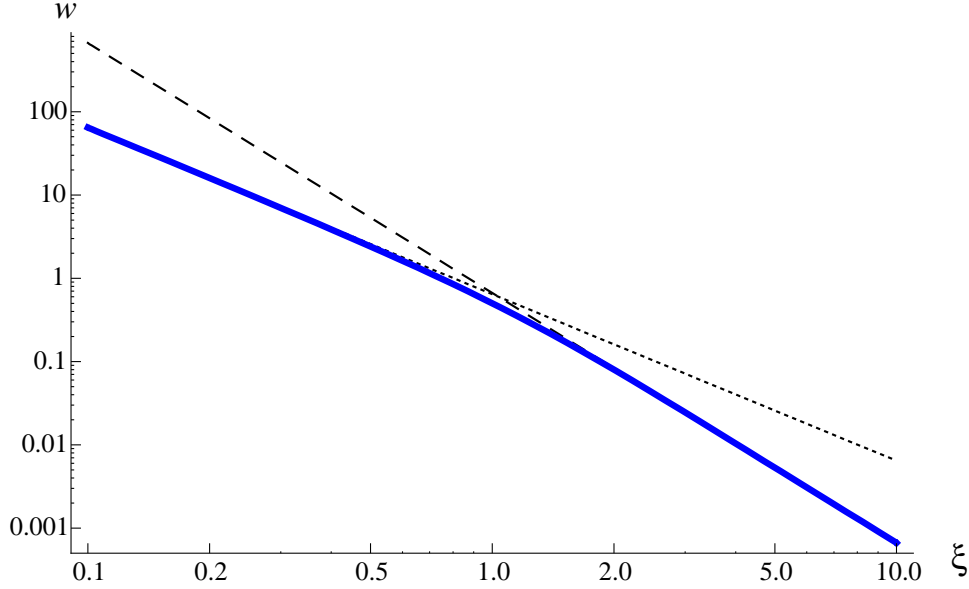


Figure 1. Solution for w in the case of the BD potential. The numerical solution is shown by solid thick (blue) line. For distances much larger than the Vainshtein radius, $\xi \gg 1$, the solution is well approximated by the asymptotic (4.21), shown by dashed thin (black) line. Close to the source, $\xi \ll 1$, the numerical solution approaches the Q -scaling asymptotic, eq. (4.39), shown by dotted thin (black) line.

namely the same equation as equation (3.35). An assumed power law behaviour leads then to the *Vainshtein* scaling at small ξ , as (see eq. (3.39))

$$w \sim w_V \propto \frac{1}{\sqrt{\xi}}. \quad (4.37)$$

Whether such a scaling leads to a real or an imaginary solution depends on the potential. For the AGS potential it leads to a real leading behaviour $w \sim w_V = \sqrt{\frac{8}{9\xi}}$. An expansion of the solution around this Vainshtein scaling can then be obtained in the following form

$$w(\xi) = \sqrt{\frac{8}{9\xi}} + B_0 \xi^{-\frac{5}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{4}} - \frac{3(-5 + \sqrt{5})}{8\sqrt{2}(-4 + \sqrt{5})} B_0^2 \xi^{-2 + \frac{3\sqrt{5}}{2}} + \frac{6\xi^2}{31} + \dots \quad (4.38)$$

This expansion can be seen to match correctly the (only - see thereafter) solution of the AGS case that has the small ξ Vainshtein asymptotics, provided the constant B_0 is fixed to some specific value. It can be understood as follows. The leading term is of course the Vainshtein scaling. The next term $\propto \xi^{\frac{1}{4}(-5+3\sqrt{5})}$ is a zero mode of the linearized Q around the leading behaviour. The rest of the series is then obtained, as usual, order by order in ξ .

For the BD potential, however, the Vainshtein scaling at small ξ leads to an imaginary solution, which is not acceptable. In the BD case, rather than the Vainshtein scaling, we found that there exists a real non singular numerical solution all the way to small ξ

which interpolates between the large distance behaviour $w \sim 1/\xi^3$ for $\xi \gg 1$ and the small distance behaviour $w \sim 1/\xi^2$ for $\xi \ll 1$ (see figure 1). Notice that this solution is perfectly regular around the Vainshtein radius $\xi_V = 1$. The found new scaling at small ξ , namely

$$w \sim 1/\xi^2, \quad (4.39)$$

and named in the following *Q-scaling*, is in fact obtained from a zero mode of the operator Q . Indeed one can check that the equation $Q(w) = 0$ has the exact solution¹⁴

$$\begin{aligned} w_Q(\xi) &= \left(\frac{K_0}{\xi^3} + K_1 \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{A_0}{\xi^2} + B_0 \xi + \mathcal{O}(\xi^4), \end{aligned}$$

where K_0 and K_1 are two arbitrary constants and $A_0 = K_0^{2/3}$, $B_0 = (2K_1)/(3K_0^{1/3})$ are the first two coefficients of the expansion of the zero mode around $\xi = 0$. A solution of equation (4.13) can then be found in the form of the double expansion

$$w(\xi) = \frac{A_0}{\xi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n w_{n,k} \xi^n (\ln \xi)^k \quad (4.40)$$

where the coefficients $w_{n,k}$ are functions of A_0, B_0 . For the BD and AGS potentials, the first coefficients read:

$$\begin{aligned} w(\xi) &= \frac{A_0}{\xi^2} + \frac{3A_0B_0 - s \ln \xi}{3A_0} \xi + s \frac{3}{8} \xi^2 \\ &+ \frac{1 + s 6A_0B_0 - 54A_0^2B_0^2 - (2 - s 36A_0B_0) \ln \xi - 6 \ln^2 \xi}{216A_0^3} \xi^4 + \mathcal{O}(\xi^5). \end{aligned} \quad (4.41)$$

The values of the parameters A_0, B_0 can be fixed matching numerically the expansion at small ξ with the large ξ asymptotic behaviour. In the case of the BD potential, we find $A_0 \sim 0.645$ and $B_0 \sim 0.208$ and we find that the expansion fits very well the numerical solution up to $\xi \sim 1$ (the Vainshtein radius), as can be seen in figure 2. Expansions for

¹⁴This solution can be easily found using the new function and variables

$$\begin{aligned} \xi &\equiv \Xi_0^{1/3}, \\ w(\xi) &\equiv \left(\frac{W_0(\Xi_0)}{\Xi_0} \right)^{2/3}, \end{aligned}$$

which translates the differential equation (4.13) into the following nonlinear equation on $W_0(\Xi_0)$

$$s \frac{d^2 W_0(t)}{d\Xi_0^2} - \frac{W_0^{1/3}}{4\Xi_0^{2/3}} + \frac{1}{6\Xi_0 W_0^{1/3}} = 0,$$

where Q is transformed into the first term on the left hand side.

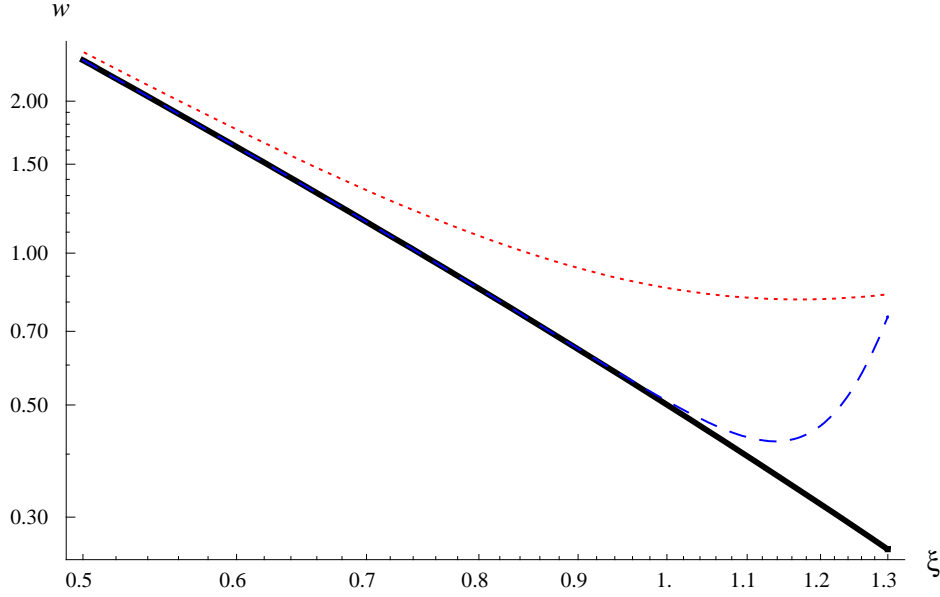


Figure 2. Plot of the numerical solution (solid black curve), and the series expansion (4.41) given up to order ξ (dotted red curve) and up to order ξ^{13} (dashed blue curve). The expansion up to ξ^{13} approximates the numerical solution with a precision better than 99% in the range $0 \leq \xi \leq 0.95$.

$u(\xi)$ and $v(\xi)$ can be found in the same way. They read

$$u(\xi) = \frac{1}{\xi} - \frac{A_0}{2} - \frac{\xi^3}{6A_0} (3A_0B_0 - s \ln \xi) - \frac{3s\xi^4}{16} + O(\xi^5) \quad (4.42)$$

$$v(\xi) = -\frac{1}{\xi} + (D_0 + \frac{1}{2}A_0 \ln \xi) + \frac{\xi^3}{54A_0} (s + 9A_0B_0 - s \ln \xi) + s \frac{3\xi^4}{64} + O(\xi^5). \quad (4.43)$$

In dimensionful units, and keeping only the dominant terms, the above equations (4.42) and (4.43) read (the corresponding expression for μ has been given in equation (3.40))

$$\lambda = \frac{R_S}{R} + \mathcal{O}(1) \quad (4.44)$$

$$\nu = -\frac{R_S}{R} + \frac{1}{2}A_0(R_S M)^{4/5} \ln R + \mathcal{O}(1) \quad (4.45)$$

Note that the leading terms at small R , $\lambda = R_S/R$ and $\nu = -R_S/R$, correspond to the linearization of the Schwarzschild solution in General Relativity, and hence, even with our new scaling, one recovers (in the decoupling limit) the Schwarzschild solution at distances smaller than the Vainshtein radius, in agreement with the Vainshtein original idea that nonlinearities can cure the vDVZ discontinuity. Notice however that this happens here for a potential, the BD potential, for which the Vainshtein mechanism was believed not to work because of the imaginary nature of the Vainshtein scaling at small ξ [12]. It is

also interesting to notice that the first correction to the Newtonian potential arising from equation (4.45) has a form similar to the one required by MOND [1].

Our numerical investigations of the solution in the BD case lead to the conclusion that there is in this case a unique solution (shown in figure 1) with the right asymptotics (4.21). This was confirmed by an analytic proof of this uniqueness (around $\xi = +\infty$) provided by J. Ecalte [28]. To conclude on the BD potential, let us further mention that in this case, the numerical integration appears to be stable against small perturbations. Namely, a slight change in the initial conditions at large ξ_i does not result in growing divergences but only in small oscillations around the found unique solution. This can be understood analytically by perturbing around the asymptotic solution (see appendix C).

Let us now turn to discuss the AGS case (potential (2.5), or $s = +1$). In this case, the expansion (4.35) still holds, but in analogy with the example (4.28) we found in this case infinitely many solutions with the same power serie expansion (4.35) at infinity. In this case, indeed, we found that with the same asymptotics at infinity, different behaviours, including the original Vainshtein scaling, were possible at small ξ . In fact, the most general behaviour at small ξ , is still of the form of the Q -scaling (4.39) with the asymptotic expansion (4.40)–(4.41), but depending on the chosen solution at infinity, this behaviour can be picked up at arbitrarily small ξ while there is an intermediate region at ξ smaller than one where the solution follows the Vainshtein scaling (4.37) (see figure 3). The Vainshtein scaling then appears as the limiting case of the family of solution having the right asymptotics as infinity (4.21), and so can be obtained in the AGS case. From a practical point of view, numerical integration in the AGS case is quite difficult, due to numerical instabilities which appear for distances larger than the Vainshtein radius $\xi = 1$. Indeed, any small departure from the solution sources exponentially growing modes and Runge-Kutta type of integrations reach singularities quickly. In this context, we found very useful, while integrating from large ξ_i towards $\xi = 0$, to use the asymptotic expansion (4.34), truncated at the order appropriate to ξ_i . We were also able to confirm our numerical results by solving equation (4.11) using a relaxation method, which is more robust under numerical instabilities. Again, our numerical investigations were confirmed by mathematical proofs of the existence (around $\xi = +\infty$) of infinitely many solutions with asymptotics (4.21) [28, 29]. In fact, one can also show that any two solutions of (4.11) having the same asymptotics (4.21) differ (at dominant order) at large ξ by a quantity given by a constant times $\xi^{3/2} \exp(-k/5 \xi^{5/2})$ where k is an integer [28]. Finally, one can also analyse the problem by perturbation theory around the large ξ behaviour (4.21). This is done in appendix C and we find that there are both a growing and a decaying mode. The growing mode is responsible for the numerical instability pointed out above and should be discarded in the true solution; the subdominant decaying mode, similar to the decreasing exponential found for equation (4.28), can be freely specified while keeping the asymptotic behaviour (4.21).

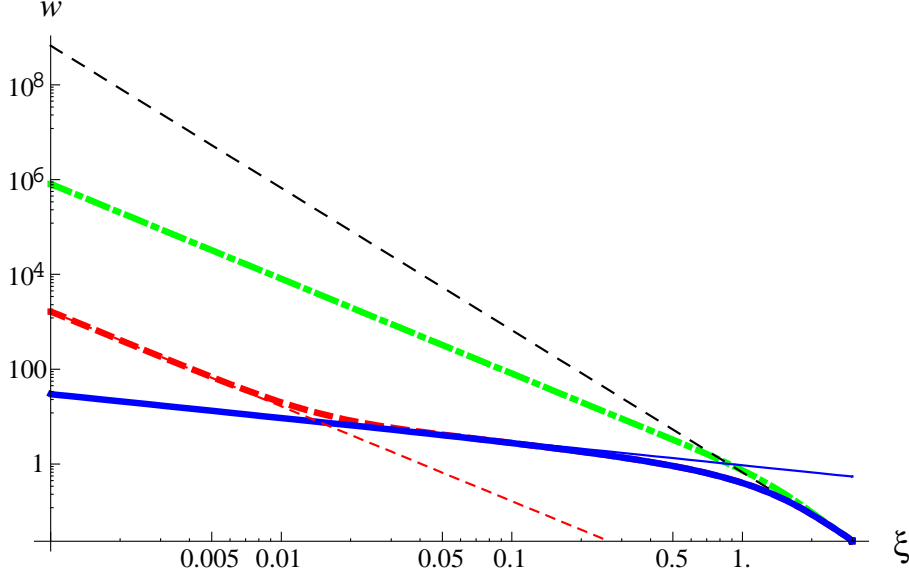


Figure 3. Plot of the numerical solutions for w in the case of the AGS potential, starting from $\xi_i = 2.5$. For $\xi \gg 1$ all the solutions approach the asymptotic (4.21), shown by dashed thin (black) line. At small distances, $\xi \ll 1$ the solutions pick up different asymptotic regimes. The solid thick (blue) line corresponds to the Vainshtein scaling $w \sim 1/\sqrt{\xi}$. The dash-dotted thick (green) line corresponds to a solution with the Q -scaling (4.39). The dashed thick (red) line corresponds to a solution which first follows the Vainshtein scaling and then finally picks up the Q -scaling (4.39).

4.2.4 Solution for the BD and AGS potentials inside the source

Let's now include a source. For simplicity, we consider a star of constant density, ρ_a , and radius ξ_\odot (i.e. of radius R_\odot in physical units). We have

$$\rho_a = \frac{3}{\xi_\odot^3},$$

leading to the equation for w inside the source

$$2Q(w) + \frac{3}{2}w = \frac{1}{\xi_\odot^3}.$$

Here too, two different types of solutions can be guessed. The first kind are solutions of the form

$$w(\xi) = \frac{A_0}{\xi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} w_n \xi^n \quad (4.46)$$

corresponding again to a $1/\xi^2$ leading behaviour for small ξ . The second kind are solutions of the form

$$w(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{2n} \xi^{2n} = A_0 + s \frac{3A_0 \xi_\odot^3 - 2}{20A_0 \xi_\odot^3} \xi^2 + \dots \quad (4.47)$$

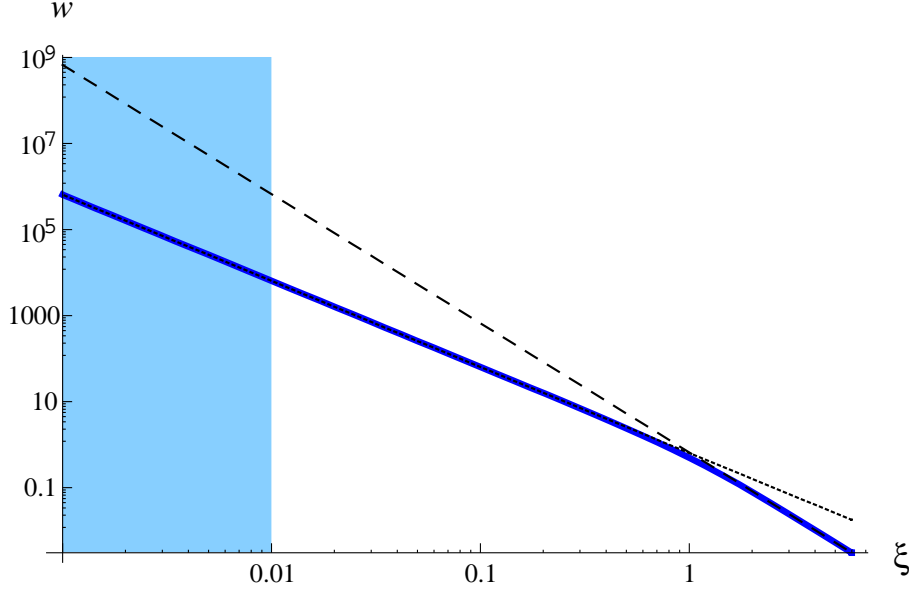


Figure 4. Plot of the numerical solution for w in the case of the BD potential in the presence of a source of radius $\xi_0 = 0.01$ (depicted above by a light blue area), starting from $\xi_i = 6$. The blue thick line corresponds to the Q -scaling of eq. (4.46), which is picked up by the asymptotic behaviour at infinity. Note that the solution is almost not affected by the presence of the source.

where the leading term is now $w \sim A_0$ (and $s = -1$ in the BD case, and $s = +1$ in the AGS one).

Our numerical integration indicates that, the BD solution, which is fixed by the asymptotic condition at infinity (4.22), follows the $w \sim 1/\xi^2$ behaviour inside the star, as shown in figure 4. In the AGS case, the situation is more subtle: generically (i.e. without fine tuning), the non singular solutions also adopt such a $1/\xi^2$ leading behaviour; an example of such a solution is presented in figure 5 (thick dash-dotted red curve). However, there is a case for which the other scaling $w \sim A_0$ is possible. This case precisely corresponds to the Vainshtein solution outside of the source, as shown in figure 5 (thick blue curve).

Note that for the Vainshtein and Q -scaling at small R , and in the absence of a source, the Jacobian (3.8) is going asymptotically to zero. This is not true for the scaling (4.47). Moreover, only this scaling leads to a finite Ricci scalar of the physical metric $g_{\mu\nu}$ at $R = 0$. Hence, this might provide a way to select a physical solution in the full nonlinear theory. Discussion of these interesting issues is however left for a future work [30], since it involves keeping track of nonlinear terms in the equations beyond those appearing in the DL.

4.2.5 Solution in the most general case

In the most general case of equation (4.11) with arbitrary α and β , a solution with a Vainshtein scaling at small ξ can easily be found. It is obtained by a power law ansatz and

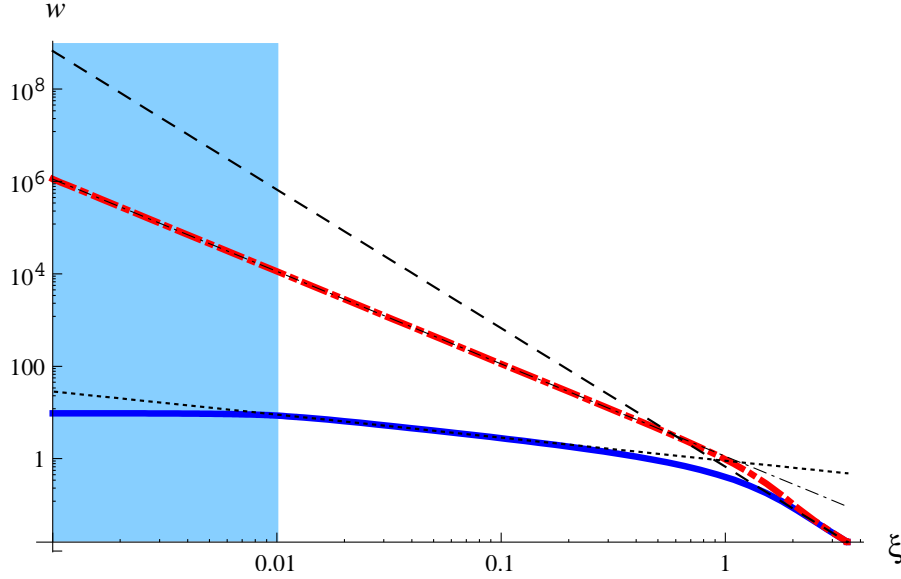


Figure 5. Plot of the numerical solutions for w in the case of the AGS potential in the presence of a source of radius $\xi_\odot = 0.01$ (depicted above by a light blue area), starting from $\xi_i = 3.5$. The solid thick (blue) line corresponds to the solution having the behaviour eq. (4.47) inside the source. The thick dash-dotted (red) line illustrates the Q -scaling, eq. (4.46), inside the source.

dropping the term linear in w in eq. (4.11) and reads

$$w_V(\xi) = \left[\frac{16}{3(25\alpha + 13\beta)} \right]^{1/2} \xi^{-1/2}, \quad \text{as } \xi \rightarrow 0.$$

This solution is real iff

$$25\alpha + 13\beta > 0.$$

In analogy with the discussion of the previous subsection, one can look for another scaling where the dominant term (at small ξ) is given by a zero mode of the operator Q appearing in equation (4.11). Zero modes in the form of power law,

$$w_Q = A\xi^p, \quad (4.48)$$

can be found, where p is given by

$$p_{\pm} = \frac{-3\alpha - 2\beta \pm \sqrt{-\beta^2 - 2\alpha\beta}}{\alpha + \beta}, \quad \text{for } \alpha + \beta \neq 0, \quad (4.49)$$

where the plus sign in the right hand side corresponds to the power p_+ , and the minus sign to the power p_- . Note that for $\alpha + \beta = 0$, e.g. the BD and AGS potentials studied in subsection 4.2.3 and 4.2.4, the Q -scaling $p = -2$ can be found from (4.49) taking the limit

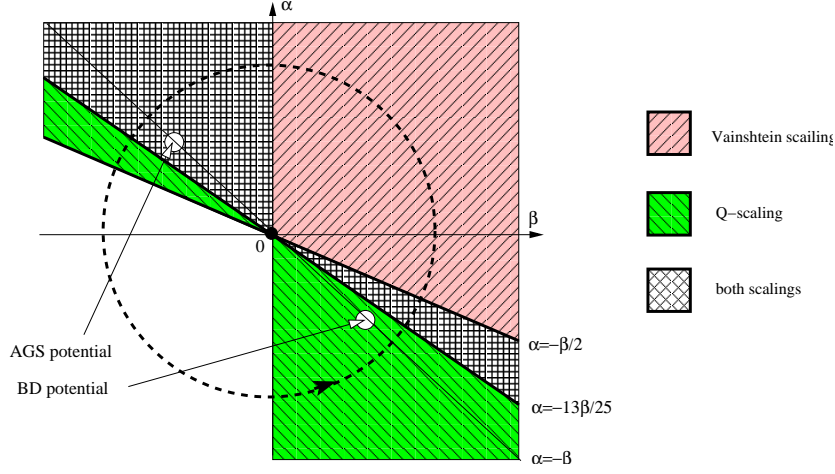


Figure 6. The diagram of possible scalings for solutions of eq. (4.11) at $\xi \rightarrow 0$ in the plane of parameters α and β . The whole parameter space (excluding the origin) can be reduced to the circle of unit radius, with the help of an appropriate rescaling (see the text).

$\alpha \rightarrow -\beta$. One can check also that, in order to describe the dominant behaviour at small ξ , any particular root, p_+ or p_- , should satisfy an additional criterion, namely,

$$p < -\frac{1}{2},$$

otherwise with this scaling the nonlinear terms in eq. (4.11) are not dominant.

The various possibilities for the different power law scaling as $\xi \rightarrow 0$ are summarized in figure 6 in the (α, β) plane. Roughly speaking eq. (4.11) possesses four different regimes at $\xi \rightarrow 0$ with:

- only Vainshtein scaling;
- only Q -scaling;
- both Vainshtein and Q -scalings;
- no power law scaling.

There are three boundary lines, where interesting transitions from one type to another can happen:

- $\beta = 0$;
- $\alpha = -13\beta/25$;
- $\alpha = -\beta/2$.

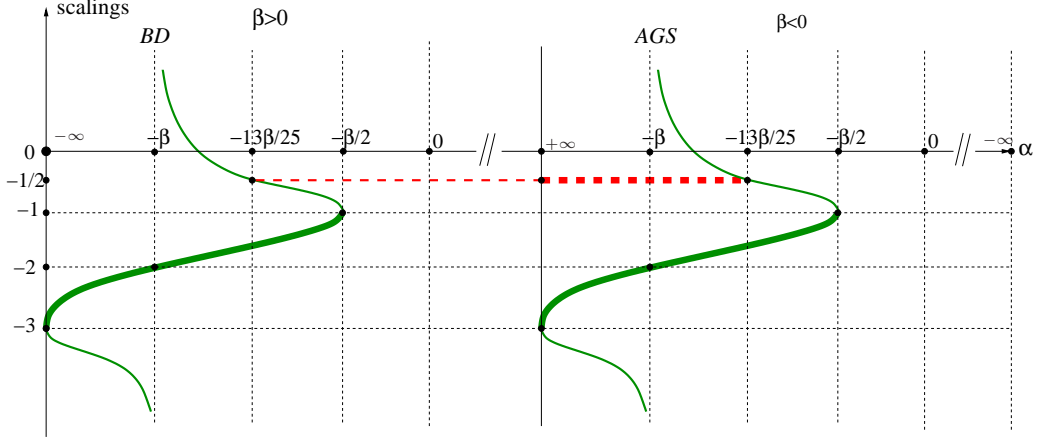


Figure 7. The values of the possible power law scaling exponents of the solutions of eq. (4.10) at small ξ as a function of parameters α and β . The circle in the figure 6 is mapped to the horizontal segment. The Vainshtein scaling is shown by dashed horizontal (red) line, while the Q -scalings are shown by solid (green) lines. The scalings which are found to smoothly continue to the asymptotic (4.21) at large ξ are shown by thick lines. The scalings at $\xi \rightarrow 0$ which do not give the required asymptotic at large ξ are shown by thin lines.

Note, that with the help of the rescaling $\xi \rightarrow \bar{C}\xi$ and $w \rightarrow \bar{C}^{-3}w$, with $\bar{C} = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/10}$, eq. (4.11) can be brought to the same form where the coefficients α and β now verify $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, and hence one can restrict the study of the different cases in the (α, β) plane of figure 6 to those where α and β lie on the circle of unit radius. This circle is mapped to the horizontal segment in figure 7 which shows together with the possible power scaling (the values of the Vainshtein and Q -scaling power scalings are plotted on the vertical axis), results of the numerical integrations of equation (4.11) indicating which of the scalings are in fact realized in the solutions having the right large ξ asymptotics w_∞ given by (4.21). Depending on the sign of β , this asymptotics does or does not fix a unique behaviour at small ξ . Indeed, for $\beta > 0$ small variations of initial conditions at large ξ does not affect the solution at small ξ , similar to the case we have already studied, the BD potential. This signals about the uniqueness of the solution for eq. (4.11) when the asymptotic behaviour is fixed by (4.21). On the contrary, for $\beta < 0$, the asymptotic behaviour (4.21) does not fix uniquely the solution, and we find infinitely many different solutions at small ξ with the same behaviour at large ξ .

Starting from the point $(\alpha, \beta) = (-1, 0)$, and moving counter-counter-clock-wise along the unit circle of figure 6, i.e. from the left and along the horizontal segment of figure 7, let us now describe with more details the successive cases of interest together with the results of our numerical integrations.

- $\beta = 0, \alpha < 0$.

This point is somewhat special: no Vainshtein scaling is possible and the two Q -

scalings are equal and coincide with the asymptotic solution at infinity,

$$w_Q(\xi) \propto \xi^{-3}, \quad \xi \rightarrow 0.$$

In fact, in this case the asymptotic form eq. (4.21) satisfies eq. (4.11) exactly for any $\xi > 0$,

$$w(\xi) = \frac{2}{3\xi^3}.$$

This can be easily understood recalling that whenever β vanishes, the covariant form of $Q^{(\alpha,\beta)}$ can be read off in equation (2.25) to contain only \square acting on $\tilde{\phi}$, and hence, in vacuum, a solution of $\square\tilde{\phi} = 0$ is a solution everywhere.¹⁵

- $\beta > 0, -\infty < \alpha \leq -\beta/2$.

The solution at $\xi \rightarrow 0$, with the correct large distance asymptotics (4.21), is always given by the Q -scaling with p_- , although in some parts of this region of parameters we could expect the second Q -scaling and/or Vainshtein scaling. This region contains the BD potential, which we have already studied in detail.

- $\beta > 0, -\beta/2 < \alpha < +\infty$.

The solution is always singular in this region, the integration from large ξ always breaks down at some finite distance $\xi > 0$. One could have expected the existence of a regular solution with the Vainshtein asymptotic scaling but it appears that this scaling does not give the required asymptotic behaviour at infinity.

- $\beta = 0, \alpha > 0$.

This case is similar to the case, $\beta = 0, \alpha < 0$. An exact solution for $\xi > 0$ is given by an analytic expression,

$$w(\xi) = \frac{2}{3\xi^3}.$$

- $\beta < 0, -13\beta/25 < \alpha < +\infty$.

For $\beta < 0$ the asymptotic condition at infinity (4.21) does not fix uniquely the solution, as in the case of AGS potential, which is included in this region of parameters. Thus tuning the initial conditions at large ξ we are able to obtain at small ξ either the Q -scaling with p_+ ,¹⁶ or the Vainshtein scaling or a singular solution. It is remarkable that the other Q -scaling cannot be obtained by the tuning of the initial conditions even though the scaling with p_- would be a dominant scaling for $-\beta < \alpha < +\infty$. Here again it is found, as in the AGS case, that the Vainshtein scaling appears as a limiting regime of a family of solutions which all have the Q -scaling as their innermost scaling, but can behave at some intermediate range of ξ following the Vainshtein scaling (see figure 3).

¹⁵We leave for a future publication the discussion of the inclusion of a source.

¹⁶Note that this is a whole family of solutions, since by tuning the initial conditions at large ξ we can get different factor A in (4.48) at small ξ .

- $\beta < 0$, $-\beta/2 \leq \alpha \leq -13\beta/25$.

The only possible scaling here, as confirmed by numerical integration,¹⁷ is a family of the Q -scaling with p_+ and different A in (4.48). Of course, changes in the initial conditions also lead to singular solutions as well.

- $\beta < 0$, $-\infty < \alpha < -\beta/2$.

There is no scaling possible for small ξ , and indeed, the numerical integration gives only singular solutions in this region.

When it is possible to find a scaling for small ξ (either of Vainshtein or of Q type), a full solution can be obtained as a power law expansion in ξ , similar to the ones obtained in the specific cases of AGS and BD potentials (eq. (4.38) and (4.41)). Note that for both Vainshtein and Q -scalings, it is always possible to add to the leading behaviour a zero mode of the linearized Q around the leading term, introducing a free constant (denoted B_0 in eq. (4.38) and (4.41)) which should be fixed by matching the small ξ expansion with the asymptotic behaviour (4.21).

To conclude, we have found that for the range of parameters $\beta < 0$, $\alpha < -\beta/2$ and $\beta > 0$, $\alpha > -\beta/2$, regular solution(s) with the right large distance asymptotics (4.21) exist. For positive β , and fixed α only one such solution exists and it has the Q -scaling at small ξ . For negative β , and fixed α , a whole family of such solutions exist, which have the Q -scaling at small ξ , while the Vainshtein scaling appears as a limiting case of this family of solutions. As such, and in contrast to the Q -scaling, it never appears as the only possible scaling realized at small ξ . In the other range of parameters only singular solution(s) can be found if the asymptotic behaviour (4.21) is fixed.

5 Discussion and conclusions

In this paper we have investigated static spherically symmetric solutions of nonlinear massive gravities in the so-called decoupling limit (DL). After having first identified how to obtain this limit with the ansätze we used and which are appropriate for studying static spherical symmetry, we have solved the system of equations left over in the DL and obtained non singular solutions featuring a Vainshtein-like recovery of solutions of General Relativity (GR). This first shows that the singularities found to arise solving the full nonlinear system of equations [12] are not present in the DL, despite the fact those singularities are commonly thought to be due to a negative energy mode also seen in this limit and associated with the kind of instability first discussed by Boulware and Deser [11]. To us, this is not necessarily a surprise, since there is in fact no clear clash between having (static), non singular, spherically symmetric solutions and a ghost (coupled to positive energy modes) in a model. In fact, appendix D gives a toy example with such a property. One should of course worry about the possible instabilities (in time) of the static solutions, but this is another story and has a priori nothing to do with the singularities discussed in [12]. Moreover, we also found that the scaling at distances smaller than the Vainshtein radius,

¹⁷the border case with $p_+ = p_-$ is included.

first conjectured by Vainshtein [10], was only a limiting case in an infinite family of non singular solutions each showing a Vainshtein recovery of GR solutions below the Vainshtein radius but a different (but common) scaling at small distances. This new scaling was shown to be associated with zero modes of the nonlinearities left over in the DL. Interestingly, this family of solution all have the same asymptotic power law expansions but differ at small distances which means in particular that the asymptotic expansion is not enough to fix uniquely the solution at small distance. We also noticed, including sources, that the Vainshtein scaling gives a better behaviour at the origin, but it is hard to conclude on this matter without studying the nonlinearities not included in the DL and we plan to come back on this issue in a future work [30]. Last, we have also shown that potentials that were thought not to admit a Vainshtein-like recovery of GR solutions, because the conjectured Vainshtein scaling at small distances would have lead to imaginary solutions, could in fact accommodate such a recovery via a different scaling at small distances. This scaling is the same as the one mentioned above associated with zero modes of the nonlinearities appearing in the DL.

An intriguing question is whether the properties found in the DL, and summarized above, also hold in the full nonlinear system. This requires in particular solving numerically the full nonlinear system, which is not an easy task given the numerical instabilities we already noticed in the DL. We will carry a thorough analysis of the full nonlinear system, stressing in particular the rôle of the neglected interactions, in a future publication [30]. At this stage, let us just say that the findings of this work opens the possibility that important properties of the full nonlinear system could have been overlooked. On the other hand, if indeed this is not the case, it shows that the DL is not capturing all the interesting physics of the spherically symmetric solutions. It is also important to answer this question for the sake of a better understanding of other models, such as the DGP model where the role of nonlinearities in the equivalent DL and beyond are not fully understood. e.g. there are no known non singular exact solution in the bulk and on the brane describing the equivalent of a Schwarzschild Black Hole in DGP theory and results on the Vainshtein mechanism in DGP gravity are all obtained using some approximation scheme [14, 15, 21].

Acknowledgments

We thank J. Garriga, S. Randjbar-Daemi and especially A. Vainshtein for interesting discussions. We are also very grateful to A. Cid, O. Lopez Pouso and R. Lopez Pouso for their interest, results and communications with us concerning the differential equation (4.25). We thank much J. Ecalle for the same and the time taken to communicate with us and explain us his wonderful theory and results. The work of EB was supported by the EU FP6 Marie Curie Research and Training Network “UniverseNet” (MRTN-CT-2006-035863).

A Equations of motion of X^A

We first derive the form of the variation $\delta f_{\mu\nu}(x)$ of $f_{\mu\nu}(x)$, defined as in equation (2.11), when X^A varies as $X^A(x) \rightarrow X^A(x) + \delta X^A(x)$. We have, replacing $X^A(x)$ by $X^A(x) +$

$\delta X^A(x)$ in the definition of $f_{\mu\nu}(x)$, that $\delta f_{\mu\nu}(x)$ is given by

$$\begin{aligned}\delta f_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu \delta X^A \partial_\nu X^B f_{AB}(X) \\ &\quad + \partial_\mu X^A \partial_\nu \delta X^B f_{AB}(X) \\ &\quad + \partial_\mu X^A \partial_\nu X^B \delta X^C \partial_C f_{AB}(X).\end{aligned}\tag{A.1}$$

Using then that

$$\delta_A^C = \partial_A x^\sigma \partial_\sigma X^C,$$

where $x^\sigma(X)$ stands for the inverse mapping of $X^A(x)$, we find that

$$\partial_\nu X^B f_{AB}(X(x)) = \partial_A x^\sigma f_{\sigma\nu}(x),$$

and

$$\partial_C f_{AB}(X) = \partial_C x^\sigma \partial_\sigma X^D \partial_D f_{AB}(X).$$

Inserting those expression in (A.1), we find that the latter reads

$$\begin{aligned}\delta f_{\mu\nu} &= \partial_\mu \delta X^A \partial_A x^\sigma f_{\sigma\nu}(x) \\ &\quad + \partial_\nu \delta X^B \partial_B x^\sigma f_{\mu\sigma}(x) \\ &\quad + \delta X^C \partial_C x^\sigma \partial_\sigma X^D \partial_\mu X^A \partial_\nu X^B \partial_D f_{AB}(X).\end{aligned}$$

We then define $\delta x^\mu(x)$ as in (2.13), and rewrite $\delta f_{\mu\nu}$ as

$$\begin{aligned}\delta f_{\mu\nu} &= \partial_\mu \delta x^\sigma f_{\sigma\nu} + \partial_\nu \delta x^\sigma f_{\mu\sigma} + \delta x^\sigma \partial_\sigma f_{\mu\nu} \\ &\quad - \delta X^C f_{EF} \partial_\nu X^F (\partial_B \partial_C x^\sigma \partial_\mu X^B \partial_\sigma X^E + \partial_C x^\sigma \partial_\sigma \partial_\mu X^E) \\ &\quad - \delta X^C f_{EF} \partial_\mu X^E (\partial_A \partial_C x^\sigma \partial_\nu X^A \partial_\sigma X^F + \partial_C x^\sigma \partial_\sigma \partial_\nu X^F)\end{aligned}\tag{A.2}$$

If one differentiates with respect to x^μ (respectively x^ν) the quantity

$$\delta_C^E = \partial_C x^\sigma \partial_\sigma X^E,$$

we see that the last terms in the last two lines of the equation (A.2) vanish, and hence we get that $\delta f_{\mu\nu}$ is given by the expression (2.12), that is to say the Lie derivative of $f_{\mu\nu}$ along the expression δx^μ considered as a vector field on the space-time manifold. In fact it is easy to see that δx^μ transforms as a vector field under a coordinate change $x'^\mu = x'^\mu(x)$. Indeed, under such a coordinate change X^A and δX^A are scalar quantities, and hence we get that

$$\delta x'^\mu(x') = \delta x^\sigma(x(x')) \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma},$$

using the fact that $x'^\mu(X'(x'))$ which appears in the definition of $\delta x'^\mu(x')$ can also be rewritten as

$$x'^\mu(X'(x')) = x'^\mu(x(X(x'))).$$

We now use the fact that the interaction term between the two metrics, appearing in the action S_{int} is a scalar under reparametrization. Hence, under a coordinate change of the form $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$, one has that

$$\left(\frac{\delta}{\delta f_{\mu\nu}(x)} \mathcal{V}^{(a)}(f, g) \right) \mathcal{L}_\xi f_{\mu\nu} + \left(\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \mathcal{V}^{(a)}(f, g) \right) \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}$$

is a total derivative, so its integral over space-time vanishes (provided we consider asymptotically vanishing ξ fields). Using then that

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu$$

and the definition of the energy momentum tensor (2.9), we obtain that under a reparametrization generated by the infinitesimal vector field ξ^μ , one has

$$\int d^4x \sqrt{-g} \xi_\mu \nabla_\nu T_g^{\mu\nu} = -\frac{1}{8} m^2 M_P^2 \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta f_{\mu\nu}(x)} \mathcal{V}^{(a)}(f, g) \right) \mathcal{L}_\xi f_{\mu\nu}.$$

Applying this formula with $\xi^\mu = \delta x^\mu$ defined above, we get the expression (2.14).

B Quadratic part of the equations of motion in the λ, μ, ν gauge

We find for $G_{tt}^{(Q)}$ and $G_{RR}^{(Q)}$

$$\begin{aligned} G_{tt}^{(Q)}(\nu, \lambda) &= -\frac{\lambda^2}{2R^2} + \frac{\lambda\nu}{R^2} - \frac{\lambda\lambda'}{R} + \frac{\nu\lambda'}{R}, \\ G_{RR}^{(Q)}(\nu, \lambda) &= -\frac{\lambda^2}{2R^2}, \end{aligned}$$

while the quantities Q_{tt} , Q_{RR} and Q_b are depending on the choice of interaction term $S_{\text{int}}[f, g]$ in action (2.3). e.g. for the two interaction terms (2.4) and (2.5), they read respectively

$$\begin{aligned} Q_{tt}^{(2)}(\nu, \lambda, \mu) &= \frac{3\mu^2}{2} + \lambda\mu - \frac{9\mu\nu}{4} + R\mu\mu' - \frac{R^2\mu'^2}{8} - \frac{3\lambda\nu}{4} - \frac{3R\nu\mu'}{4} \\ Q_{tt}^{(3)}(\nu, \lambda, \mu) &= \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda\nu}{4} + \frac{R\lambda\mu'}{2} + \frac{R^2\mu'^2}{8} - \frac{3\mu\nu}{4} - \frac{R\nu\mu'}{4} \\ Q_{RR}^{(2)}(\nu, \lambda, \mu) &= \frac{3\lambda\mu}{2} - \frac{3\mu\nu}{4} + \frac{R\mu\mu'}{2} + \frac{3\lambda\nu}{4} + \frac{R\nu\mu'}{4} \\ Q_{RR}^{(3)}(\nu, \lambda, \mu) &= -\frac{3\mu^2}{2} + \frac{\lambda\mu}{2} + \frac{\mu\nu}{4} - \frac{R\mu\mu'}{2} + \frac{\lambda\nu}{4} - \frac{R\nu\mu'}{4} - \frac{\nu^2}{4} \\ Q_b^{(2)}(\nu, \lambda, \mu) &= \frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu\mu''}{2} + \frac{2\mu\mu'}{R} + \frac{\nu\mu''}{4} + \frac{\mu\lambda'}{2R} + \frac{\mu'\lambda}{2R} \\ &\quad + \frac{\nu\lambda'}{4R} + \frac{\nu\mu'}{R} - \frac{\mu\nu'}{R} + \frac{\nu\nu'}{R} + \frac{3\lambda\mu}{2R^2} + \frac{3\lambda\nu}{2R^2} \\ Q_b^{(3)}(\nu, \lambda, \mu) &= -\frac{\mu'^2}{4} - \frac{\mu\mu''}{2} - \frac{2\mu\mu'}{R} - \frac{\nu\mu''}{4} - \frac{\mu\lambda'}{2R} + \frac{\mu'\lambda}{2R} \\ &\quad - \frac{\nu\mu'}{R} - \frac{\nu\nu'}{4R} - \frac{\mu'\nu'}{2} - \frac{\nu\lambda'}{4R} - \frac{\lambda\nu'}{2R} + \frac{\lambda^2}{2R^2} - \frac{\lambda\nu}{R^2} \end{aligned}$$

As we now show, in full generality $Q(\mu)$ depends only on two parameters, α and β , leading to the expression of eq. (3.30). We start from the general expression for the interaction term (2.6)

$$S_{\text{int}} = -\frac{1}{8} m^2 M_P^2 \int d^4x \mathcal{V}(g, f) = -\frac{1}{8} m^2 M_P^2 \int d^4x \sqrt{-g} V(\mathbf{g}^{-1} \mathbf{f}).$$

The scalar $V(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{f})$ depending only on four invariants made out of the rank two tensor $M_\nu^\mu \equiv g^{\mu\sigma} f_{\sigma\nu}$ (or using a matrix notation $\mathbf{M} \equiv \mathbf{g}^{-1}\mathbf{f}$), we choose here those invariants Δ_i to be given by

$$\Delta_i \equiv \text{tr} [(\mathbf{M} - \mathbb{1})^i], \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Thus, one can write

$$V(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{f}) = V(\Delta_i).$$

The stress-energy tensor (2.9) then reads

$$T_{\mu\nu}^g = -\frac{M_P^2 m^2}{4} \left[-\frac{1}{2} V g_{\mu\nu} + \sum_{i=1}^4 \frac{\delta \Delta_i}{\delta g^{\mu\nu}} \frac{\partial V}{\partial \Delta_i} \right]$$

where $\frac{\delta \Delta_i}{\delta \mathbf{g}^{-1}} = (\mathbf{M} - \mathbb{1})^i \mathbf{f}$, using again a matrix notation. We can restrict now the metrics to be of the spherically symmetric form (3.3). Since we are interested only in the terms quadratic in μ , we can further specify our study to the case for which $\lambda = \nu = 0$, and expand the stress-energy tensor to the second order in μ , which requires to expand the potential V to third order in μ . This can be done easily noticing that $\Delta_i = \mathcal{O}(\mu^i)$, leading to the expansion:

$$V(\Delta_i) = a_1 + a_2 \Delta_1 + a_3 \Delta_1^2 + a_4 \Delta_2 + a_5 \Delta_1^3 + a_6 \Delta_1 \Delta_2 + a_7 \Delta_3 + \mathcal{O}(\mu^4).$$

With this expansion, the Bianchi identity (3.14) reads

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_P^2 m^2} \frac{1}{R} \nabla^\mu T_{\mu R}^g &= Q^{(\alpha, \beta)}(\mu) - \Omega \left(\frac{\mu'}{2R} + \frac{\mu''}{8} \right) - \frac{3}{80} \Omega R \mu' \mu'' \\ &= 0 \end{aligned} \tag{B.1}$$

with $Q^{(\alpha, \beta)}(\mu)$ defined as in eq. (3.30), and

$$\begin{aligned} \Omega &= -a_2 - 4a_3 - 4a_4, \\ \alpha &= -\frac{1}{24} (a_2 + 4a_3 + 16a_4 - 48a_5 + 24a_7), \\ \beta &= -\frac{1}{40} (-7a_2 - 68a_3 + 88a_4 - 80a_6 - 120a_7). \end{aligned}$$

The last step is to impose the Pauli-Fierz form (2.1) for the mass term, which fixes the terms linear in μ in the right hand side of the first line of eq. (B.1) to be zero, i.e. $\Omega = 0$. Identifying then the remaining quadratic term $Q^{(\alpha, \beta)}(\mu)$ in (B.1) with the quadratic term $Q(\mu_0)$ in eq. (3.27) leads eventually to the general expression of eq. (3.30) for the quadratic term in μ in the Bianchi identity. Hence, as said in the main body of the text, it is here explicitly seen that the fact no term linear in μ appears in the Bianchi identity, a crucial property for what concerns the scalings appearing in the Vainshtein mechanism, is due to the peculiar tensorial structure of the Pauli-Fierz mass term.

C Expansion around $\xi = +\infty$

Here we study with some details solutions of eq. (4.11) for general α and β , expanding around the leading behaviour (4.21). It is convenient to factorize the asymptotic form of w given by (4.21) and further use the following change of parametrization

$$w(\xi) = \frac{2}{3\xi^3} [1 - \xi^3 G(\zeta)]$$

$$\xi = \left(\frac{5\sqrt{2|\beta|}}{3} \zeta \right)^{2/5}.$$

The asymptotic behaviour, (4.21) $w \sim w_\infty = 2/(3\xi^3)$, translates into

$$\begin{aligned} \xi^3 G(\zeta) &\rightarrow 0 \\ \xi^3 \zeta G'(\zeta) &\rightarrow 0 \end{aligned} \tag{C.1}$$

when $\zeta \rightarrow \infty$. In terms of the new variables ζ and G , eq. (4.11) takes the form

$$\begin{aligned} S(\zeta) = & \left[1 - \left(\frac{9\alpha + 5\beta}{4\beta} \right) \xi^3 G(\zeta) - \left(\frac{15\alpha + \beta}{8\beta} \right) \xi^3 \zeta G'(\zeta) \right] G''(\zeta) \\ & + \left[1 - \left(\frac{11}{20} \frac{9\alpha + 5\beta}{4\beta} \right) \xi^3 G(\zeta) - \left(\frac{33\alpha + 29\beta}{8\beta} \right) \xi^3 \zeta G'(\zeta) \right] \frac{G'(\zeta)}{\zeta} \\ & + \frac{|\beta|}{\beta} G(\zeta), \end{aligned} \tag{C.2}$$

with the source $S(\zeta)$ being given by

$$S(\zeta) = \frac{4|\beta|}{\xi^8}.$$

It is then clear that the limiting behaviour (C.1) for G allows to drop all the nonlinear terms in G the equation (C.2) in the vicinity of infinity. This procedure leads to a Bessel equation of 0-th order with a source:

$$G''(\zeta) + \frac{G'(\zeta)}{\zeta} + \frac{|\beta|}{\beta} G(\zeta) = S(\zeta). \tag{C.3}$$

For $\beta > 0$, the general solution of (C.3) is given by

$$G(\zeta) = \frac{\pi}{2} J_0(\zeta) \int_{\zeta}^{\infty} Y_0(t) S(t) t dt - \frac{\pi}{2} Y_0(\zeta) \int_{\zeta}^{\infty} J_0(t) S(t) t dt + D_1 J_0(\zeta) + D_2 Y_0(\zeta).$$

The only possible choice of integration constants D_1 and D_2 consistent with the conditions (C.1), is that they both vanish, i.e. $(D_1, D_2) = (0, 0)$. In this case, G has the asymptotic behaviour $G(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{-16/5})$ and the asymptotic conditions (C.1) fixes the solution uniquely. This is similar to the example (4.27) discussed in the text and also allows to understand qualitatively properties of the numerical integration of equation (4.11) for positive β . Indeed, in this case, if one integrate numerically inwards (from large ξ), numerical errors can source the homogeneous modes $J_0(\zeta), Y_0(\zeta)$. However, the later are not

growing out of control in agreement with the fact the numerical solution is found to be stable under such small perturbations.

For $\beta < 0$, the general solution of (C.3) reads

$$G(\zeta) = -K_0(\zeta) \int_1^\zeta I_0(t) S(t) t dt - I_0(\zeta) \int_\zeta^\infty K_0(t) S(t) t dt + D_3 K_0(\zeta) + D_4 I_0(\zeta).$$

It this case, the conditions (C.1) only leads to the vanishing of D_4 , but the other integration constant D_3 remains free, since the homogeneous mode $K_0(\zeta)$ decays fast enough at infinity. Whatever the chosen D_3 , one finds a leading behaviour for G given by $G(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{-16/5})$. This is analogous to the example (4.28) discussed in the main body of the text. The existence of the growing mode $I_0(\zeta)$ allows us to understand better the numerical instabilities observed in the case of the AGS potential. It is indeed impossible not to source this growing mode numerically, and, after some point, this mode dominates the solution and the integration reaches a singularity. As a consequence, one has to tune very carefully the initial conditions of the numerical integration in order to avoid this explosion.

D An example of a system with coupled normal and ghost fields

Let us consider the following higher-order derivative action, S , for the scalar field ϕ

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\Box \phi)^2 + T \phi \right\}. \quad (\text{D.1})$$

The above system can be described in terms of two fields, one positive energy ("normal") field, ϕ_c , and one negative energy (ghost) field, ψ_c . In terms of these new variable, S now reads

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \phi_c \Box \phi_c - \frac{1}{2} \psi_c \Box \psi_c - \frac{1}{4} (\phi_c - \psi_c)^2 + \frac{T}{\sqrt{2}} (\phi_c + \psi_c) \right\}, \quad (\text{D.2})$$

where it is explicitly seen that the normal and ghost degrees of freedom are coupled via a potential term. From (D.1) we find the equation of motion for ϕ ,

$$\Box (\Box \phi) = T. \quad (\text{D.3})$$

In the case of the point-like source, the full solution of (D.3) is,

$$\phi(R) = \frac{A_1 R}{2} + \frac{A_0 R^2}{2} - \frac{B_1}{R} + B_0. \quad (\text{D.4})$$

The first term in (D.4) "kills" the delta-function in the r.h.s. of (D.3). Note, that the solution is smooth everywhere for $R > 0$. Moreover, the presence of the growing with R terms in (D.4) is not dangerous, since these terms do not lead to a "bad" physical behaviour at $R \rightarrow \infty$. Indeed, the energy density, $E(R)$, for the configuration of ϕ given by (D.4) is [31]

$$E(R) = \frac{1}{2} \left(A_0 + \frac{A_1}{R} \right)^2 + \frac{A_1}{R^2} \left(\frac{A_1}{2} + A_0 R + \frac{B_1}{R^2} \right). \quad (\text{D.5})$$

Thus, $E(R) \rightarrow (1/2)A_0^2$ as $R \rightarrow \infty$.

References

- [1] M. Milgrom, *A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis*, *Astrophys. J.* **270** (1983) 365 [SPIRES].
- [2] V.A. Rubakov and P.G. Tinyakov, *Infrared-modified gravities and massive gravitons*, *Phys. Usp.* **51** (2008) 759 [arXiv:0802.4379] [SPIRES].
- [3] M. Fierz, *Force-free particles with any spin*, *Helv. Phys. Acta* **12** (1939) 3 [SPIRES];
M. Fierz and W. Pauli, *On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field*, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **173** (1939) 211 [SPIRES].
- [4] G.R. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, *4D gravity on a brane in 5D Minkowski space*, *Phys. Lett. B* **485** (2000) 208 [hep-th/0005016] [SPIRES].
- [5] C. Deffayet, *Cosmology on a brane in Minkowski bulk*, *Phys. Lett. B* **502** (2001) 199 [hep-th/0010186] [SPIRES];
C. Deffayet, G.R. Dvali and G. Gabadadze, *Accelerated universe from gravity leaking to extra dimensions*, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 044023 [astro-ph/0105068] [SPIRES].
- [6] K. Koyama, *Are there ghosts in the self-accelerating brane universe?*, *Phys. Rev. D* **72** (2005) 123511 [hep-th/0503191] [SPIRES];
D. Gorbunov, K. Koyama and S. Sibiryakov, *More on ghosts in DGP model*, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 044016 [hep-th/0512097] [SPIRES];
C. Charmousis, R. Gregory, N. Kaloper and A. Padilla, *DGP spectroscopy*, *JHEP* **10** (2006) 066 [hep-th/0604086] [SPIRES];
R. Gregory, N. Kaloper, R.C. Myers and A. Padilla, *A new perspective on DGP gravity*, *JHEP* **10** (2007) 069 [arXiv:0707.2666] [SPIRES].
- [7] G. Dvali, *Infrared modification of gravity*, [hep-th/0402130] [SPIRES];
K. Izumi, K. Koyama, O. Pujolàs and T. Tanaka, *Bubbles in the self-accelerating universe*, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 104041 [arXiv:0706.1980] [SPIRES];
K. Izumi and T. Tanaka, *No de Sitter invariant vacuum in massive gravity theory with ghost*, *Prog. Theor. Phys.* **121** (2009) 419 [arXiv:0709.0199] [SPIRES].
- [8] C. Deffayet, G. Gabadadze and A. Iglesias, *Perturbations of self-accelerated universe*, *JCAP* **08** (2006) 012 [hep-th/0607099] [SPIRES].
- [9] H. van Dam and M.J.G. Veltman, *Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields*, *Nucl. Phys. B* **22** (1970) 397 [SPIRES];
V.I. Zakharov, *Linearized gravitation theory and the graviton mass*, *JETP Lett.* **12** (1970) 312 [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **12** (1970) 447] [SPIRES];
Y. Iwasaki, *Consistency condition for propagators*, *Phys. Rev. D* **2** (1970) 2255 [SPIRES].
- [10] A.I. Vainshtein, *To the problem of nonvanishing gravitation mass*, *Phys. Lett. B* **39** (1972) 393 [SPIRES].
- [11] D.G. Boulware and S. Deser, *Can gravitation have a finite range?*, *Phys. Rev. D* **6** (1972) 3368 [SPIRES].
- [12] T. Damour, I.I. Kogan and A. Papazoglou, *Spherically symmetric spacetimes in massive gravity*, *Phys. Rev. D* **67** (2003) 064009 [hep-th/0212155] [SPIRES].
- [13] J.H. Jun and I. Kang, *Instability of flat space for massive gravitational fields*, *Phys. Rev. D* **34** (1986) 1005 [SPIRES].

- [14] C. Deffayet, G.R. Dvali, G. Gabadadze and A.I. Vainshtein, *Nonperturbative continuity in graviton mass versus perturbative discontinuity*, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 044026 [[hep-th/0106001](#)] [[SPIRES](#)].
- [15] M. Porrati, *Fully covariant Van Dam-Veltman-Zakharov discontinuity and absence thereof*, *Phys. Lett. B* **534** (2002) 209 [[hep-th/0203014](#)] [[SPIRES](#)];
A. Lue, *Cosmic strings in a brane world theory with metastable gravitons*, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 043509 [[hep-th/0111168](#)] [[SPIRES](#)];
A. Gruzinov, *On the graviton mass*, *New Astron.* **10** (2005) 311 [[astro-ph/0112246](#)] [[SPIRES](#)];
T. Tanaka, *Weak gravity in DGP braneworld model*, *Phys. Rev. D* **69** (2004) 024001 [[gr-qc/0305031](#)] [[SPIRES](#)].
- [16] P. Creminelli, A. Nicolis, M. Papucci and E. Trincherini, *Ghosts in massive gravity*, *JHEP* **09** (2005) 003 [[hep-th/0505147](#)] [[SPIRES](#)].
- [17] C. Deffayet and J.-W. Rombouts, *Ghosts, strong coupling and accidental symmetries in massive gravity*, *Phys. Rev. D* **72** (2005) 044003 [[gr-qc/0505134](#)] [[SPIRES](#)].
- [18] N. Arkani-Hamed, H. Georgi and M.D. Schwartz, *Effective field theory for massive gravitons and gravity in theory space*, *Ann. Phys.* **305** (2003) 96 [[hep-th/0210184](#)] [[SPIRES](#)].
- [19] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali and G. Gabadadze, *Non-local modification of gravity and the cosmological constant problem*, [hep-th/0209227](#) [[SPIRES](#)];
G. Dvali, S. Hofmann and J. Khoury, *Degravitation of the cosmological constant and graviton width*, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 084006 [[hep-th/0703027](#)] [[SPIRES](#)].
- [20] A. Nicolis, R. Rattazzi and E. Trincherini, *The galileon as a local modification of gravity*, [arXiv:0811.2197](#) [[SPIRES](#)].
- [21] G. Gabadadze and A. Iglesias, *Schwarzschild solution in brane induced gravity*, *Phys. Rev. D* **72** (2005) 084024 [[hep-th/0407049](#)] [[SPIRES](#)].
- [22] C.J. Isham, A. Salam and J.A. Strathdee, *F-dominance of gravity*, *Phys. Rev. D* **3** (1971) 867 [[SPIRES](#)].
- [23] V.P. Nair, S. Randjbar-Daemi and V. Rubakov, *Massive spin-2 fields of geometric origin in curved spacetimes*, [arXiv:0811.3781](#) [[SPIRES](#)].
- [24] T. Damour and I.I. Kogan, *Effective Lagrangians and universality classes of nonlinear bigravity*, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 104024 [[hep-th/0206042](#)] [[SPIRES](#)].
- [25] S.G. Nibbelink, M. Peloso and M. Sexton, *Nonlinear properties of Vielbein massive gravity*, *Eur. Phys. J. C* **51** (2007) 741 [[hep-th/0610169](#)] [[SPIRES](#)].
- [26] T. Damour, I.I. Kogan and A. Papazoglou, *Non-linear bigravity and cosmic acceleration*, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 104025 [[hep-th/0206044](#)] [[SPIRES](#)].
- [27] A. Salam and J.A. Strathdee, *A class of solutions for the strong gravity equations*, *Phys. Rev. D* **16** (1977) 2668 [[SPIRES](#)];
C.J. Isham and D. Storey, *Exact spherically symmetric classical solutions for the F-G theory of gravity*, *Phys. Rev. D* **18** (1978) 1047 [[SPIRES](#)];
D. Blas, C. Deffayet and J. Garriga, *Bigravity and Lorentz-violating massive gravity*, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 104036 [[arXiv:0705.1982](#)] [[SPIRES](#)]; *Causal structure of bigravity solutions*, *Class. Quant. Grav.* **23** (2006) 1697 [[hep-th/0508163](#)] [[SPIRES](#)];
Z. Berezhiani, D. Comelli, F. Nesti and L. Pilo, *Exact spherically symmetric solutions in massive gravity*, *JHEP* **07** (2008) 130 [[arXiv:0803.1687](#)] [[SPIRES](#)];

- Spontaneous Lorentz breaking and massive gravity*, *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 131101 [[hep-th/0703264](#)] [[SPIRES](#)].
- [28] J. Ecalles, private communication.
- [29] A. Cid, O. Lopez Pouso and R. Lopez Pouso, private communication.
- [30] E. Babichev, C. Deffayet and R. Ziour, in preparation.
- [31] A. Anisimov, E. Babichev and A. Vikman, *B-inflation*, *JCAP* **06** (2005) 006 [[astro-ph/0504560](#)] [[SPIRES](#)].

Chapitre 5

Solutions à symétrie sphérique de la gravité massive

Sommaire

5.1	Construire une solution de la théorie complète	154
5.1.1	Les solutions de types Q	154
5.1.2	La solution de Vainshtein	156
5.2	Preuve de l'existence d'une solution à symétrie sphérique de la gravité massive	157
5.2.1	Présentation des résultats	157
5.2.2	Recovering General Relativity from massive gravity (article)	160
5.3	Étude de la solution trouvée	165
5.3.1	Les fonctions λ et ν	165
5.3.2	La fonction μ	166
5.3.3	La pression P	167
5.4	Un modèle simplifié de gravité massive	168
5.4.1	Les équations du mouvement	168
5.4.2	Validation numérique	169
5.4.3	Obtention d'une équation pour μ seulement	169

Dans ce chapitre, nous présentons l'un des principaux résultats des travaux menés durant ma thèse : la preuve de l'existence d'une solution statique, asymptotiquement plate, et à symétrie sphérique, de la gravité massive en présence d'une source étendue. Ce résultat, obtenu en collaboration avec E. Babichev et C. Deffayet a fait l'objet d'une lettre [28], intitulée “*Recovering General Relativity from massive gravity*”, et soumise en Juillet 2009 au journal *Physical Review Letters (PRL)* ; nous reproduisons ci-dessous le texte intégral de cet article (en anglais). La solution que nous avons mise en évidence est telle que la métrique physique est très proche de la Relativité Générale (RG) au voisinage et au sein de la source, tout en différant fortement de la Relativité Générale à grandes distances. L'existence d'une telle solution valide donc la conjecture de Vainshtein et ouvre donc la possibilité d'utiliser ce mécanisme pour construire des modèles réalistes de gravité modifiée.

L'étude des solutions à symétrie sphérique de la gravité massive dans la limite de découplage (LD), que nous avons détaillée au Chapitre 4, a bien entendu joué un rôle très précieux pour l'étude de la théorie complète de la gravité massive. C'est ce lien entre la LD et le cas général que nous détaillons au cours de la première section de ce chapitre : nous y expliquons notamment pourquoi la solution de Vainshtein dans la LD est un bon point de départ pour construire une possible solution du cas général. La deuxième section est constituée du texte de l'article [28], reproduit *in extenso* : les résultats principaux concernant la solution à symétrie sphérique que nous avons trouvée y sont présentés. Dans la troisième section de ce chapitre, nous apportons quelques compléments d'information¹ sur la solution trouvée dans l'article [28]. Enfin, nous présentons dans la dernière section un modèle simplifié de gravité massive, qui permet de retrouver qualitativement les principales caractéristiques de la solution non-linéaire, tout en étant plus simple à étudier.

5.1 Construire une solution de la théorie complète

Nous avons mis en évidence au Chapitre 4 l'existence de solutions à symétrie sphérique de la gravité massive dans la LD. Nous voudrions maintenant étudier la possibilité de les utiliser pour construire une solution de la théorie complète, où toutes les non-linéarités sont prises en compte. Nous avons identifié au Chapitre 4 deux types de solutions : les solutions de type Q , et la solution de Vainshtein. Nous allons donc les considérer successivement et voir dans quelle mesure il est possible de les généraliser au cas où toutes les non-linéarités sont prises en compte.

5.1.1 Les solutions de types Q

Les solutions de type Q sont dominées à petites distances par un mode zéro w_Q du terme non-linéaire Q (cf. Section 4.1.4). Afin de ne pas compliquer inutilement la discussion, nous allons nous concentrer sur les termes de masse de BD (2.42) et de AGS (2.43). Dans ces cas, nous avons vu à l'équation (4.28) que le mode zéro de Q qui domine à petites distances est donné par

$$w_Q \sim \frac{1}{\xi^2}.$$

À la Section 2.5.1, nous avons évoqué la possibilité que toute solution de la LD reste une bonne approximation d'une solution du système non-linéaire, sur tout intervalle sur lequel les non-linéarités négligées dans la LD sont effectivement négligeables. Nous avons alors montré qu'à grandes distances, la LD était valide jusqu'à $R \sim m^{-1}$. Au-delà, nous savons de toutes façons que la solution est très bien décrite par la solution de la gravité massive linéarisée. Nous voudrions à présent déterminer l'échelle à laquelle les non-linéarités d'ordre supérieur au terme cubique (2.100) d'auto-interaction du mode scalaire commencent à jouer un rôle. Prenons l'exemple de l'interaction $(\partial^2\phi)^4$:

$$\frac{(\partial^2\phi)^4}{(\partial^2\phi)^3} \sim \partial^2\phi \sim \frac{1}{R^2}\phi \sim \mu \sim a^2 w(\xi) \sim \frac{a^2}{\xi^2}, \quad (5.1)$$

où nous avons utilisé la relation (4.20) entre ϕ et μ dans la limite de découplage, la définition (4.6) de la fonction w et le comportement asymptotique à petites distances $w \sim w_Q \sim 1/\xi^2$.

¹Ces compléments d'information seront repris dans l'article en préparation [29].

Nous voyons donc que le terme quartique doit être pris en compte pour des distances plus petites que $\xi \sim a$, c'est-à-dire $R \sim R_{sing} = (R_S^2 m^{-3})^{1/5}$. C'est précisément le rayon (3.67) que nous avons identifié à la section 3.4.2, autour duquel l'intégration numérique du système complet atteint une singularité. On peut procéder à des calculs similaires à celui de l'équation (5.1) pour les différents termes non-linéaires au-delà de la LD ; ce calcul est fait à la section 4.1.3 de l'article [30], et permet de vérifier que le rayon R_{sing} est le plus grand rayon à partir duquel la LD n'est plus une bonne approximation de la théorie.

Il semble donc possible de construire une solution de la théorie complète sur l'intervalle $[R_{sing}, +\infty[$ à partir d'une solution de type Q : sur l'intervalle $[R_V; +\infty[$, la solution est proche de la solution linéarisée (3.61), et sur l'intervalle $[R_{sing}, m^{-1}]$, la solution est bien approchée par la solution de la LD. Notons que sur l'intervalle $[R_V; m^{-1}]$ commun à ces deux régimes, la solution correspond à la fois au régime linéarisé de la théorie complète et à la solution dans la limite de découplage, c'est-à-dire que $w \sim 2/(3\xi^3)$. D'un point de vue numérique, il est simple d'intégrer le système d'équations (3.5), (3.6) et (3.9) à partir d'un point situé à une distance $\xi_i \gg 1$ jusqu'au voisinage de $\xi_f \equiv R_{sing}/R_V = a$; on peut alors vérifier que la solution ainsi trouvée est très proche de la solution correspondante dans la LD, validant ainsi notre raisonnement analytique. Remarquons également que lorsqu'on prend la limite $a \rightarrow 0$, l'intervalle de validité de la LD tend continûment vers \mathbb{R}_+ : on retrouve ici le fait que la LD correspond à l'ordre le plus bas du développement des équations de la théorie complète en puissances de a .

Que se passe-t-il en-deça de R_{sing} ? La LD n'est plus valide, et notamment $w \not\sim 1/\xi^2$. Le problème devient alors très compliqué analytiquement et impose de se tourner vers une approche numérique. Comme nous l'avons expliqué à la section 3.4.2, nous n'avons pas réussi à trouver numériquement de solution de type Q sans singularité autour de ξ_{sing} , confirmant ainsi les résultats de Damour *et al.* [85]. Notons que dans le cas du terme de masse de BD, toutes les solutions de la LD sont de type Q ; cela signifie donc qu'il ne nous a pas été possible de trouver une solution pour ce potentiel². C'est pourquoi il nous faut maintenant nous tourner vers la seule solution de la LD qui ne soit pas de type Q : la solution de Vainshtein.

²La présence de ces singularités systématiques, dont l'origine est clairement reliée aux non-linéarités de la théorie complète qui ne sont pas prises en compte dans la LD, ne constitue pas, bien sûr, une preuve définitive de la non-existence de solutions de type Q en gravité massive : la résolution numérique étant difficile, il est envisageable qu'un ajustement extrêmement fin des conditions aux bords permette de trouver une solution régulière.

5.1.2 La solution de Vainshtein

La solution de Vainshtein w_V de la LD pour le terme de masse d'AGS (2.43) est telle que

$$\begin{aligned} w_V(\xi) &\sim \frac{2}{3\xi^3} + \frac{4}{3\xi^8} + \dots \quad \text{pour } \xi \gg 1 \\ w_V(\xi) &\sim \sqrt{\frac{8}{9\xi}} + B_0 \xi^{-\frac{5}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{4}} + \dots \quad \text{pour } \xi_\odot \lesssim \xi \ll 1 \\ w_V(\xi) &\sim A_0 + \frac{3A_0\xi_\odot^3 - 2}{20A_0\xi_\odot^3} \xi^2 + \dots \quad \text{pour } \xi \lesssim \xi_\odot \end{aligned} \quad (5.2)$$

où l'on a rappelé les premiers termes des développements (4.24), (4.26) et (4.30). Les fonctions u et v ont quant à elles le comportement asymptotique suivant :

$$\begin{aligned} u_V(\xi) &\sim \frac{2}{3\xi} - \frac{2}{3\xi^6} + \dots \quad \text{pour } \xi \gg 1 \\ u_V(\xi) &\sim \frac{1}{\xi} - \frac{\sqrt{2}}{3}\xi^{3/2} + \dots \quad \text{pour } \xi_\odot \lesssim \xi \ll 1 \\ u_V(\xi) &\sim \left(-\frac{A_0}{2} + \frac{1}{\xi_\odot^3}\right) \xi^2 + \dots \quad \text{pour } \xi \lesssim \xi_\odot \end{aligned} \quad (5.3)$$

et

$$\begin{aligned} v_V(\xi) &\sim -\frac{4}{3\xi} - \frac{1}{9\xi^6} + \dots \quad \text{pour } \xi \gg 1 \\ v_V(\xi) &\sim -\frac{1}{\xi} + \frac{2\sqrt{2}}{9}\xi^{3/2} + \dots \quad \text{pour } \xi_\odot \lesssim \xi \ll 1 \\ v_V(\xi) &\sim D_0 + \left(\frac{A_0}{4} + \frac{1}{2\xi_\odot^3}\right) \xi^2 + \dots \quad \text{pour } \xi \lesssim \xi_\odot \end{aligned} \quad (5.4)$$

On peut faire un calcul similaire à celui de l'équation (5.1) dans le cas de la solution de Vainshtein

$$\frac{(\partial^2\phi)^4}{(\partial^2\phi)^3} \sim \partial^2\phi \sim \frac{1}{R^2}\phi \sim \mu \sim a^2 w_V(\xi) \sim \frac{a^2}{\sqrt{\xi}}, \quad (5.5)$$

qui permet de se rendre compte que le terme quartique ne devient important qu'à partir de $\xi \sim a^4$, c'est-à-dire $R \sim R_S$. Il est possible de faire un calcul similaire pour les autres termes qui ne sont pas pris en compte par la LD : on peut alors vérifier qu'aucun d'entre eux ne devient important avant $R \sim R_S$. La LD est donc valide jusqu'au rayon de Schwarzschild ! Remarquons que le calcul ci-dessous n'est valable qu'à l'extérieur de la source. À l'intérieur de la source, on obtient

$$\frac{(\partial^2\phi)^4}{(\partial^2\phi)^3} \sim \partial^2\phi \sim \frac{1}{R^2}\phi \sim \mu \sim a^2 w_V(\xi) \sim a^2, \quad (5.6)$$

Le terme quartique (et c'est en fait le cas pour tous les autres termes non-linéaires autres que le terme cubique de la LD) est toujours sous-dominant, car nous avons supposé que $a \ll 1$.

Dans le cas d'un trou noir, ou d'une source compacte telle que $R_\odot \sim R_S$, nous voyons que la LD cesse d'être valable au voisinage du rayon de Schwarzschild. Pour des distances plus petites, d'autres non-linéarités commencent à jouer un rôle (et en premier lieu celles de la RG), et il n'est pas possible de prédire par de simples considérations analytiques le comportement de la solution dans ces régimes de champ fort. L'intégration numérique des équations du mouvement semblent indiquer la présence d'une singularité au voisinage du rayon de Schwarzschild ; cependant, nous n'avons pas mené d'étude numérique suffisamment détaillée dans le cas d'objets compacts³ pour pouvoir conclure d'une façon ferme, et nous laissons donc cette question ouverte pour l'instant.

En revanche, dans le cas d'une source étendue, c'est-à-dire telle que $R_\odot \gg R_S$ (en pratique, il faut $R_\odot \gtrsim 5R_S$), la solution de Vainshtein à l'intérieur de la source garantit que la LD est une bonne approximation de la théorie complète jusqu'au centre de la source. Or nous savons, grâce à l'étude de la LD que nous avons présentée au Chapitre 4, que la solution de Vainshtein dans la LD existe jusqu'à l'origine. Nous avons donc toutes les raisons d'espérer qu'une solution de la théorie complète existe. Cette solution serait très proche de la solution de Vainshtein dans la LD entre $R = 0$ et $R \sim m^{-1}$, puis adopterait le comportement exponentiellement décroissant de la solution linéaire (3.61). Bien sûr, il ne s'agit pour l'instant que d'une conjecture, dont nous allons maintenant présenter la confirmation numérique.

5.2 Preuve de l'existence d'une solution à symétrie sphérique de la gravité massive

Nous avons montré, E. Babichev, C. Deffayet et moi-même (RZ), dans l'article [28], soumis en 2009 au journal *Physical Review Letters (PRL)*, l'existence d'une solution à symétrie sphérique de la gravité massive. Nous reproduisons ci-dessous le texte intégral (en anglais) de cet article intitulé "*Recovering General Relativity from massive gravity*". Avant le texte de l'article proprement dit, nous donnons (en français) un résumé des principaux résultats qui y sont exposés.

5.2.1 Présentation des résultats

Nous venons de voir au travers de la précédente section qu'il était prometteur de construire une solution des équations (3.5), (3.6) et (3.9), à partir de la solution de Vainshtein de la LD. Cette solution doit bien sûr adopter le comportement linéaire (3.61) à grandes distances. Notons que ce comportement asymptotique dépend d'une constante d'intégration C , qu'il faudra déterminer numériquement, et comparer à la valeur fixée dans la LD par l'équation (4.16), à savoir $C = 1$. Elle doit également satisfaire la condition de régularité à l'origine (3.62). Enfin, la solution de Vainshtein étant telle que $w \sim \text{cte}$ à l'intérieur de la solution, la solution recherchée doit être telle que la condition (3.63) est vérifiée, c'est-à-dire $\mu'(R = 0) = 0$.

³Étudier le régime de champ fort, et en particulier de l'existence de solutions de trous noirs, requiert notamment de choisir un système de coordonnées adaptées, de façon à éviter la singularité de coordonnées de la métrique de Schwarzschild à l'horizon du trou noir. Dans le cas d'objets compacts, il peut également être nécessaire de modéliser finement l'équation d'état de la matière au sein de la source, modélisation qui va au-delà des résultats présentés ici.

Dans l'article [28], nous montrons numériquement, pour la première fois, qu'une telle solution existe bien. Pour cela, nous utilisons deux méthodes numériques complémentaires : une intégration directe des équations du mouvement et une méthode par relaxation.

L'approche par intégration directe à la Runge-Kutta est difficile car le système est très instable numériquement dès que $\xi \gtrsim 1$, comme nous l'avons déjà mentionné à la section 3.4.2. Néanmoins, il nous a été possible d'intégrer le système d'équations (3.5), (3.6) et (3.9) en partant d'un point situé au voisinage du centre de l'étoile jusqu'à un point bien au-delà du rayon de Vainshtein (typiquement de l'ordre de $R \sim 3R_V$). Nous avons également intégré vers l'intérieur les équations du mouvement, en partant d'un point loin de la source (par exemple $R \sim 3R_V$). L'intervalle typique d'intégration pour $a \in [10^{-3}, 0.6]$ s'étend de $R = 10^{-5}R_V$ à $R \sim 3R_V$. Afin de pouvoir intégrer les équations du mouvement sur un tel intervalle, il faut fixer les conditions initiales avec une précision relative de l'ordre de 10^{-8} . Lorsqu'on intègre vers l'intérieur à partir d'une distance $R \sim 3R_V$, cette précision peut être atteinte en utilisant dans un premier temps les développements en série (3.18), puis en ajustant très finement les conditions initiales de façon à obtenir la solution de Vainshtein jusqu'au centre de l'étoile (la précision nécessaire dépendant bien sûr du point jusqu'auquel on veut pouvoir intégrer). Lorsque l'on intègre en partant de l'intérieur, on peut utiliser les valeurs des fonctions en RG pour u et v et la valeur de la LD pour la fonction w , puis affiner à la main ces conditions initiales. Enfin, notons qu'il est également possible d'utiliser les valeurs numériques obtenues par relaxation pour fixer les conditions initiales pour l'intégration de Runge-Kutta.

La méthode par relaxation permet de résoudre le système (3.5), (3.6) et (3.9) sur de très grands intervalles (typiquement tels que $R \in [0; 100 R_V]$). Les conditions imposées aux bords sont mixtes, à la fois en $\xi = 0$ et ξ_∞ ; nous renvoyons le lecteur à l'Annexe D pour plus de détails sur les conditions aux bords utilisées et sur notre implémentation numérique de la méthode par relaxation. Notons néanmoins que la méthode par relaxation procède par petites modifications successives de la configuration des fonctions λ, ν, μ jusqu'à ce que ces fonctions satisfassent les équations du mouvement avec la précision désirée. Une des étapes importantes de cette méthode consiste à choisir la configuration initiale, qui doit être suffisamment proche de la vraie solution pour que le processus itératif converge. C'est là que l'étude préalable de la LD que nous avons faite au Chapitre 4 prend tout son sens : la solution de Vainshtein de la LD constitue un excellent point de départ et c'est en la déformant un peu que l'on obtient une solution de la théorie complète.

Les deux méthodes numériques sont en parfait accord, permettant ainsi de valider de deux façons différentes nos résultats. Pour $a \in [10^{-3}, 0.6]$ et des sources non-compactes (i.e. $R_\odot \gtrsim 5R_S$), nous montrons donc qu'il est possible de trouver une solution partout régulière, asymptotiquement plate, et telles que les conditions (3.61) à l'infini et (3.62) à l'origine soient satisfaites. Cette solution est très proche de la solution de la RG à petites distances, confirmant ainsi l'hypothèse de Vainshtein [269]. On peut de plus vérifier que la première correction à la RG pour $R \ll R_V$ prend bien la forme prédite par les développements de

Vainshtein (3.55) et (3.56), c'est-à-dire que

$$\nu - \nu_{GR} \sim \frac{2\sqrt{2}}{9} (mR)^2 \sqrt{\frac{R_S}{R}}, \quad (5.7)$$

$$\lambda - \lambda_{GR} \sim -\frac{\sqrt{2}}{3} (mR)^2 \sqrt{\frac{R_S}{R}}. \quad (5.8)$$

On vérifie également que la solution est comme prévu très proche de la solution de la LD dans l'intervalle de distance $R_S \ll R \ll m^{-1}$. Pour des grandes distances $R > m^{-1}$, la solution décroît exponentiellement en suivant exactement le comportement (3.61). On peut alors vérifier numériquement que la constante d'intégration présente dans le comportement asymptotique (3.61) vaut $C \sim 1$, et est donc très proche de sa valeur (4.16) dans le régime de la LD. Ces résultats sont présentés dans l'article [28], et en particulier au travers des Figures 1, 2 et 3 ; une étude plus approfondie de la solution identifiée est également proposée à la Section 5.3.

5.2.2 Recovering General Relativity from massive gravity (article)

Nous reproduisons à présent l'article [28] intitulé “*Recovering General Relativity from massive gravity*”, publié dans *Physical Review Letters (PRL)* par E. Babichev, C. Deffayet et moi-même (RZ). Cet article est disponible sur le serveur d'archives arXiv sous la référence [[arXiv:0907.4103 \(gr-qc\)](https://arxiv.org/abs/0907.4103)].

Recovering General Relativity from Massive Gravity

E. Babichev, C. Deffayet, and R. Ziour

*AstroParticule and Cosmologie, UMR 7164-CNRS, Université Denis Diderot-Paris 7, CEA, Observatoire de Paris,
10 rue Alice Domon et Léonie Duquet, F-75205 Paris Cedex 13, France
(Received 29 July 2009; published 12 November 2009)*

We obtain static, spherically symmetric, and asymptotically flat numerical solutions of massive gravity with a source. Those solutions show, for the first time explicitly, a recovery of the Schwarzschild solution of general relativity via the so-called Vainshtein mechanism.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.201102

PACS numbers: 04.50.-h, 11.27.+d, 98.80.Jk

It is now well established that the expansion of the Universe is accelerating. This can be explained by a non-vanishing cosmological constant, raising various questions at the fundamental level, or by a ubiquitous, but mysterious, dark energy. Instead of introducing such new dark components in the Universe, so far only detected via their gravitational effects, a logical alternative is to consider possible large distance modifications of gravity. Historically, the introduction of the cosmological constant has been linked by Einstein himself to the possibility of modifying gravity at large distance via a Yukawa decay [1], i.e., to give a mass to the graviton. Interestingly, “massive gravity” has recently attracted a lot of interest in this context via constructions relying on models with extra-dimensions like the Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP) model [2]. This model, where gravity is mediated via a resonance of massive gravitons, indeed produces a late time acceleration of the expansion of the Universe via a modification of gravity at cosmological distances [3]. The consistency of the DGP model has been questioned and variants have been proposed [4]. On the other hand, the way well tested predictions of general relativity (GR) are recovered in models with massive gravitons is highly non-trivial. Indeed, a consistent free massive graviton is uniquely defined by the Pauli-Fierz theory [5], which is well known to lead to different physical predictions from those of GR, irrespectively of how small the graviton mass is. This is the celebrated van Dam–Veltman–Zakharov (vDVZ) discontinuity [6]. This, based on observations such as light bending around the Sun, would be enough to reject any theory of massive gravity provided it is well approximated by the Pauli-Fierz theory. However, soon after it was discovered, it was pointed out by Vainshtein that the vDVZ discontinuity could be cured in a suitable interacting extension of Pauli-Fierz theory [7]. The purpose of this Letter is to show that this “Vainshtein mechanism” is indeed working for static spherically symmetric solutions appropriate to describe the metric outside spherically symmetric sources. Although a cosmological version of the Vainshtein recovery of GR was shown to be present for exact solutions of the DGP model [8], nothing analogous was known so far for static solutions; e.g., static

spherically symmetric solutions of DGP model are only known locally in some approximation scheme [9]. Our results are not only of interest for the specific interacting massive gravity studied here, but also have implications for more sophisticated models such as the DGP model or its variants [2,4], the “degravitation” models [10], the Galileon and k -Mouflage models [11], as well as possibly the Hořava-Lifshitz theory [12] (see, e.g., [13]).

The theory we will consider has one dynamical metric $g_{\mu\nu}$ nonderivatively coupled to a background nondynamical flat metric $f_{\mu\nu}$ via a scalar interaction term $\mathcal{V}_{\text{int}}[f, g]$. It is defined by the following action

$$S = \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{(g)} - \frac{1}{4} m^2 \mathcal{V}_{\text{int}}[f, g] \right), \quad (1)$$

where $R_{(g)}$ is the Ricci scalar built with $g_{\mu\nu}$. The interaction $\mathcal{V}_{\text{int}}[f, g]$ is chosen such that, when expanded at quadratic order around a flat background for $g_{\mu\nu}$, one recovers the Pauli-Fierz mass term with a graviton mass given by m . There are infinitely many possible such choices [14]; we shall investigate here one of the simplest forms, also considered in [15,16], given by

$$\mathcal{V}_{\text{int}} = (g_{\mu\nu} - f_{\mu\nu})(g_{\sigma\tau} - f_{\sigma\tau})(g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau} - g^{\mu\nu}g^{\sigma\tau}). \quad (2)$$

We also consider that matter is minimally coupled to the dynamical metric $g_{\mu\nu}$. The equations of motion, obtained varying action (1) with respect to the metric $g_{\mu\nu}$, read

$$M_P^2 G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(g)}, \quad (3)$$

where $G_{\mu\nu}$ denotes the Einstein tensor computed with the metric $g_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}$ is the energy momentum tensor of matter fields, and $T_{\mu\nu}^{(g)}$ is an effective energy momentum tensor coming from the variation with respect to the metric $g_{\mu\nu}$ of the interaction term $\sqrt{-g} \mathcal{V}_{\text{int}}$.

An *Ansatz* for $g_{\mu\nu}$ appropriate to describe static spherically symmetric solutions reads

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -e^{\nu(R)} dt^2 + e^{\lambda(R)} dR^2 + R^2 d\Omega^2, \quad (4)$$

where R is parametrizing the distance to the source. With

such a choice, the solution for $g_{\mu\nu}$ can easily be compared to the Schwarzschild solution of GR given by Eq. (4) with $\nu = \nu_{\text{GR}} \equiv \ln(1 - R_S/R)$ and $\lambda = \lambda_{\text{GR}} \equiv -\nu_{\text{GR}}$, where R_S is the Schwarzschild radius of the source. For simplicity, the metric $f_{\mu\nu}$ is taken to cover a Minkowski space-time. However, one can see that when one chooses the *Ansatz* (4) for $g_{\mu\nu}$, one should keep one unknown function $\mu(R)$ in $f_{\mu\nu}$ in order for the field equations not to be overconstrained. Hence, we take $f_{\mu\nu}$ in the noncanonical flat-space form [7,16,17]

$$f_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + \left(1 - \frac{R\mu'(R)}{2}\right)^2 e^{-\mu(R)} dR^2 + e^{-\mu(R)} R^2 d\Omega^2, \quad (5)$$

where here and henceforth a prime denotes a derivative with respect to R . Note that μ cannot be measured directly because it only appears in $f_{\mu\nu}$, and hence, in the following we will focus on the physical components $\{\nu, \lambda\}$. To describe a static spherically symmetric source, we consider a matter energy momentum tensor in the perfect fluid form reading $T_\mu^\nu = \text{diag}(-\rho, P, P, P)$, where the pressure P and energy density ρ depend only on R . We also assume that this energy momentum tensor vanishes outside the radius R_\odot of the source. For such a perfect fluid and the above *Ansatz* (4), the conservation equation reads

$$P' = -\frac{\nu'}{2}(P + \rho). \quad (6)$$

We look for asymptotically flat and everywhere nonsingular solutions. In particular, we impose boundary conditions such that μ , and ν vanish at infinity as well as λ and μ' in $R = 0$.

If one linearizes the vacuum equations of motion, one finds that ν and λ are, respectively, given by

$$\nu_L = -C e^{-mR}/R, \quad (7)$$

$$\lambda_L = C(1 + mR)e^{-mR}/(2R), \quad (8)$$

where C is some integration constant. Notice that for $R \ll m^{-1}$ one gets that $\nu_L \sim -2\lambda_L$ irrespectively of the graviton mass. This is in contrast with the corresponding relation for GR stating that at distances larger than R_\odot one has $\nu_{\text{GR}} = -\lambda_{\text{GR}}$, and is just another way to phrase the vDVZ discontinuity. The constant C should be fixed by including a source.

Following Vainshtein, one can then show that the solution $\{\nu_L, \lambda_L\}$ obtained by linearization ceases to be valid at a distance smaller than the Vainshtein radius, R_V , given by $R_V = (m^{-4}R_S)^{1/5}$. For a graviton with cosmologically large Compton length m^{-1} , the Vainshtein radius of the Sun is much larger than the solar system size impeding the

use of the linearized solution to compare with solar system observables. Vainshtein argued that, below R_V , a recovery of the standard solution of GR was possible. Indeed, he found a local expansion of the functions $\{\lambda, \nu\}$ around their GR expressions $\{\lambda_{\text{GR}}, \nu_{\text{GR}}\}$ that stays valid at small m and for distances $R \ll R_V$ (an expansion with similar properties was also found for μ). For the theory (1) and (2) this expansion reads (for $R \gg R_S$)

$$\nu - \nu_{\text{GR}} \sim (mR)^2 \sqrt{(8R_S)/(81R)} + \mathcal{O}(m^4), \quad (9)$$

$$\lambda - \lambda_{\text{GR}} \sim -(mR)^2 \sqrt{(2R_S)/(9R)} + \mathcal{O}(m^4). \quad (10)$$

In contrast, the linearized expressions $\{\lambda_L, \nu_L\}$ are nowhere valid when m goes to zero, because R_V is infinite in this limit. However, it was pointed out by Boulware and Deser [18] that there was no warranty that the two expansions found by Vainshtein (for $R \gg R_V$ and $R \ll R_V$) could be joined into a nonsingular solution of the field equations. This question remained unanswered for a while and it was more recently investigated in Ref. [16] which concluded, on the basis of a numerical investigation of the field equations, that no such solution existed and hence that the Vainshtein mechanism, i.e., the nonperturbative recovery of solution of massless gravity, does fail in the massive gravities defined by the class of action (1), and, in particular, for theory (1) and (2). Here we reexamine this question in the light of a recent work [19] where we considered static spherically symmetric solutions of the field equations (3) in the so-called decoupling limit (DL). Note that the theories in the class (1) suffer from the Boulware-Deser instability [18] associated with a mode that starts propagating at the nonlinear level. This is probably enough to make those theories unrealistic, but is not really worrisome for the present work, since we simply view the theory (1) and (2) as a tool to investigate the validity of the Vainshtein mechanism, and do not advocate for a realistic application of this particular theory.

The DL enables one to focus on the nonlinearities responsible for the crossover behavior arising at the Vainshtein radius R_V and is obtained by sending together M_P and m^{-1} to ∞ while keeping the energy scale $\Lambda = (m^4 M_P)^{1/5}$, as well as $R_S M_P$, fixed. The scale Λ is associated with the strongest self-interaction in the scalar sector of the model [15]. The DL should provide a good description of the solutions (provided those exist) in the range of distances $R_S \ll R \ll m^{-1}$. Notice that this range of distance covers, in particular, the crossover distance R_V which stays constant in the DL. In [19] we obtained numerical solutions of the DL field equations which are showing a transition between a $R \ll R_V$ regime recovering linearized GR behavior and a $R \gg R_V$ regime, where the leading behavior of the solutions is given by Eqs. (7) and (8) where one sends mR to zero. Such solutions were shown to be everywhere nonsingular and to exist only for a class of

theories of the kind (1) including the one defined by Eq. (2). Note that, in the DL the nonlinearities important in GR at the Schwarzschild radius are absent as well as the terms responsible for the Yukawa decay at large distances. A crucial property of the DL is that, in vacuum, we found infinitely many solutions decreasing at infinity. This was shown both by numerical integration and by using Ecalle's theory of resurgent functions and, in particular, allows one to accommodate the presence of nonvanishing source.

The existence of nonsingular solutions in the DL is not enough to conclude on the validity of the Vainshtein mechanism in the full theory. First, because those solutions are only covering at best a limited range of distances $R_S \ll R \ll m^{-1}$ (this interval being sent to $[0, +\infty]$ taking the DL), and second, because it could be that nonlinearities present in the original field equations, but left aside by the DL, destabilize the DL solutions enough to make them become singular.

In this Letter we report results of the numerical integration of the full nonlinear field equations (3)–(6) for the theory (1) and (2) and metric *Ansätze* (4) and (5). Those equations, whose explicit (but rather long) form can be found in Ref. [16], reduce to a set of quasilinear ordinary differential equations of first order in λ and ν and of second order in μ . We included a static spherical source of radius R_\odot and constant density ρ_\odot . Hence, defining the Schwarzschild radius R_S of the source as $R_S \equiv M_\odot^2 R_\odot^3 \rho_\odot / 3$, there are only two dimensionless parameters in the model which can be taken to be R_\odot/R_V and $a \equiv mR_V$. We were able to find everywhere nonsingular asymptotically flat solutions, $\{\nu, \lambda, \mu, P\}$, by solving numerically the field equations, using both shooting and relaxation methods. To our knowledge, the existence of such solutions was unknown and shows for the first time explicitly that the Vainshtein mechanism can work in a theory of massive gravity. The shooting approach, which is based on a direct Runge-Kutta integration, is quite difficult to implement since the initial conditions need to be extremely finely tuned in order to obtain nonsingular solutions. This was already the case in the DL [19] and could explain the findings of Ref. [16]. We have been able to integrate the system of equations outward from a point deep inside the source up to a point further than the Vainshtein radius (typically $R \sim 3R_V$). We have also been able to integrate inward starting from a point far from the source (e.g., $R \sim 3R_V$) up to the core of the source. In fact the integration of the vacuum equations shows that, as in the DL, one is able to obtain infinitely many decaying solutions by slight changes of the boundary condition. In all the integrations, we have made an extensive use of local analytic series expansions of the solution in order to fix the initial conditions as precisely as possible. Even in cases where we could check that those expansions were only asymptotic expansions (i.e., that the series were not convergent), they were very useful to set with enough precision the boundary

data of the numerical integrations. Details of the numerical integration will be reported elsewhere [20]. In order to be able to obtain a wide enough range of integration (typically, R runs between $R = 10^{-5}R_V$ and $R \sim 3R_V$) the required relative precision on the initial conditions is usually of order 10^{-8} and often even more stringent. These results, obtained through a Runge-Kutta integration, have been confirmed by the use of a relaxation method. In particular the relaxation approach allowed us to solve the system on a wide range of parameters and distances (typically for R between 0 and $\sim 100R_V$). Both methods perfectly agree, demonstrating the robustness of our numerical investigation. Our main finding is that for $a \in [10^{-3}, 0.6]$ and sources that are not too compact (i.e., $R_\odot \gtrsim 5R_S$) a nonsingular solution can be found, which is asymptotically flat and has the right boundary conditions at the origin $R = 0$. It features a recovery of GR at distances $R \ll R_V$, where we also checked numerically that the first correction to the GR behavior was given by the form given in Eqs. (9) and (10). It is also well approximated by the solution obtained in the DL in the expected range of distances $R_S \ll R \ll m^{-1}$. In particular, at distances above R_V (but below m^{-1}) the behavior of the solution is given by the regime

$$\nu \sim -2\lambda \sim -(4/3)(R_S/R), \quad (11)$$

as obtained from Eqs. (7) and (8). Note that the constant C is found to be $\sim (4/3)R_S$ by the numerical integration. This value of C agrees with that obtained in the linearized theory

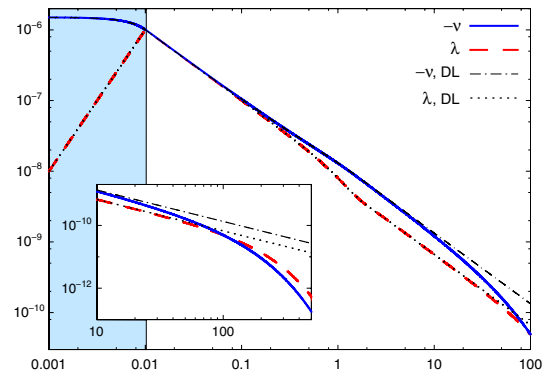


FIG. 1 (color online). Plot of the metric functions $-\nu$ and λ vs R/R_V , in the full nonlinear system and the decoupling limit (DL), with a star of radius $R_\odot = 10^{-2}R_V$ and $mR_V = 10^{-2}$. For $R \ll R_V$, the numerical solution is close to the GR solution (where in particular $\nu \sim -\lambda \sim -R_S/R$ for $R > R_\odot$). For $R \gg R_V$, the solution enters a linear regime. Between R_V and m^{-1} , where the DL is still a good approximation, one has $\nu \sim -2\lambda \sim -(4/3)(R_S/R)$. At distances larger than m^{-1} the metric functions decay *à la* Yukawa as appearing more clearly in the inset. The latter shows the same solution but for larger values of R/R_V , and in the range of distance plotted there, the numerical solutions are indistinguishable from the analytic solutions of the linearized field equations (7) and (8).

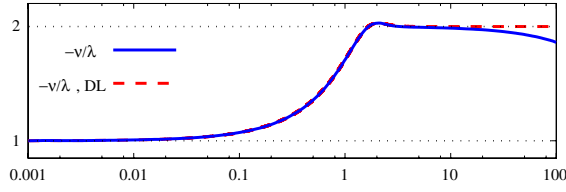


FIG. 2 (color online). Plot of the ratio of ν to $-\lambda$ vs R/R_V , with a star of radius $R_\odot/R_V = 10^{-3}$ and $mR_V = 10^{-3}$. This shows the transition, at the Vainshtein radius, between a GR regime where $\nu \sim -\lambda$ to a regime where $\nu \sim -2\lambda$. At larger distance, the solution features the expected Yukawa cutoff.

for a nonrelativistic pointlike source placed at the origin, and can be explained by the presence of a scalar polarization also responsible for the vDVZ discontinuity. At distances above m^{-1} the solution features the exponential Yukawa falloff. We checked numerically that this falloff agrees with the one given in Eqs. (7) and (8) as well as the fact that our solutions were continuously connected to flat space-time, when the mass of the source is decreased either by keeping the density fixed but decreasing the radius or by keeping the radius fixed but decreasing the density. Those results are depicted in Figs. 1–3.

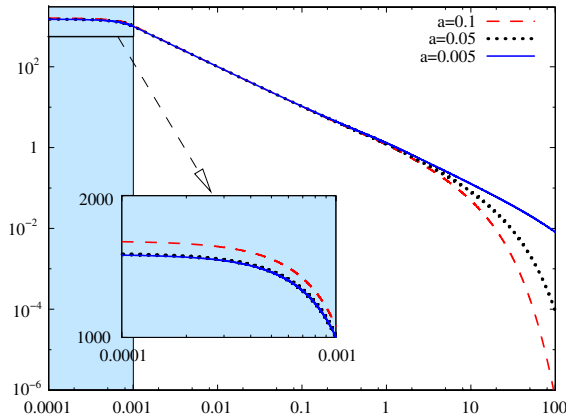


FIG. 3 (color online). Plot of $-\nu a^{-4}$ vs R/R_V (the a^{-4} factor is included for convenience such that, in the decoupling limit, all plotted theories would exactly coincide) for three different values of $a \equiv mR_V$ and source of radius $R_\odot = 10^{-3}R_V$. The solution with $a = 0.005$ corresponds to a spherical source of size and density close to that of the Milky Way and a graviton Compton length of the order of the Hubble radius. In the range of distances plotted, this solution (with $a = 0.005$) is well approximated by the DL solution. The inset shows a zoom on small distances. There, the behavior of our solutions agrees with the one of GR, and for $a = 0.1$, a value which belongs to a parameter range investigated in Ref. [16], one can see that the solution departs from the DL, emphasizing the role of the nonlinearities of GR which become important.

To summarize, we found static, spherically symmetric, and asymptotically flat numerical solutions of massive gravity showing, for the first time explicitly, a recovery of the usual Schwarzschild solution of general relativity via the so-called Vainshtein mechanism. Some issues deserve more investigations. These include the classical stability of our solutions as well as an understanding of highly relativistic objects and black holes.

We thank T. Damour for interesting discussions and suggestions. The work of E.B. was supported by the EU FP6 Marie Curie Research and Training Network “UniverseNet” (MRTN-CT-2006-035863).

- [1] A. Harvey and E. Schucking, *Am. J. Phys.* **68**, 723 (2000).
- [2] G. R. Dvali, G. Gabadadze, and M. Porrati, *Phys. Lett. B* **485**, 208 (2000).
- [3] C. Deffayet, *Phys. Lett. B* **502**, 199 (2001); C. Deffayet, G. R. Dvali, and G. Gabadadze, *Phys. Rev. D* **65**, 044023 (2002).
- [4] C. de Rham, G. Dvali, S. Hofmann, J. Khoury, O. Pujolas, M. Redi, and A. J. Tolley, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 251603 (2008).
- [5] M. Fierz, *Helv. Phys. Acta* **12**, 3 (1939); M. Fierz and W. Pauli, *Proc. R. Soc. A* **173**, 211 (1939).
- [6] H. van Dam and M. J. G. Veltman, *Nucl. Phys.* **B22**, 397 (1970); V. I. Zakharov, *JETP Lett.* **12**, 312 (1970) [*Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **12**, 447 (1970)].
- [7] A. I. Vainshtein, *Phys. Lett. B* **39**, 393 (1972).
- [8] C. Deffayet, G. R. Dvali, G. Gabadadze, and A. I. Vainshtein, *Phys. Rev. D* **65**, 044026 (2002).
- [9] A. Gruzinov, *New Astron.* **10**, 311 (2005); A. Lue and G. Starkman, *Phys. Rev. D* **67**, 064002 (2003); G. Gabadadze and A. Iglesias, *Phys. Rev. D* **72**, 084024 (2005).
- [10] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, and G. Gabadadze, *arXiv:hep-th/0209227*; G. Dvali, S. Hofmann, and J. Khoury, *Phys. Rev. D* **76**, 084006 (2007).
- [11] A. Nicolis, R. Rattazzi, and E. Trincherini, *Phys. Rev. D* **79**, 064036 (2009); C. Deffayet, G. Esposito-Farese, and A. Vikman, *Phys. Rev. D* **79**, 084003 (2009); E. Babichev, C. Deffayet, and R. Ziour, *arXiv:0905.2943*; C. Deffayet, S. Deser, and G. Esposito-Farese, *Phys. Rev. D* **80**, 064015 (2009); N. Chow and J. Khoury, *arXiv:0905.1325*.
- [12] P. Horava, *Phys. Rev. D* **79**, 084008 (2009).
- [13] S. Mukohyama, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **09** (2009) 005.
- [14] T. Damour and I. I. Kogan, *Phys. Rev. D* **66**, 104024 (2002).
- [15] N. Arkani-Hamed, H. Georgi, and M. D. Schwartz, *Ann. Phys. (N.Y.)* **305**, 96 (2003).
- [16] T. Damour, I. I. Kogan, and A. Papazoglou, *Phys. Rev. D* **67**, 064009 (2003).
- [17] A. Salam and J. A. Strathdee, *Phys. Rev. D* **16**, 2668 (1977).
- [18] D. G. Boulware and S. Deser, *Phys. Rev. D* **6**, 3368 (1972).
- [19] E. Babichev, C. Deffayet, and R. Ziour, *J. High Energy Phys.* **05** (2009) 098.
- [20] E. Babichev, C. Deffayet, and R. Ziour (to be published).

5.3 Étude de la solution trouvée

Nous avons présenté à la section précédente les principaux résultats obtenus dans l'article [28]. Nous voudrions à présent décrire plus en détail la solution obtenue, au travers d'une étude systématique des différentes fonctions en jeu : les fonctions λ et ν qui correspondent à la métrique physique, la fonction μ , et enfin la pression au sein de la source.

5.3.1 Les fonctions λ et ν

Comportement global

Le comportement des fonctions λ et ν est détaillé dans l'article [28], et il n'est donc pas nécessaire de revenir longuement sur ce point. Nous nous contenterons ici de reprendre ci-dessous, à la Fig. 5.1, la Figure 1 de [28] qui illustre très bien les points principaux :

- à courtes distances ($R \ll R_V$), la solution est très proche de la RG, et en particulier $\nu \sim -\lambda \sim -R_S/R$ au voisinage de la source,
- à grandes distances ($R \gg R_V$), la solution est dans le régime linéaire (3.61) avec $C \sim 1$. Entre R_V et m^{-1} , la solution est très proche de la solution dans la LD ; en particulier, $\nu \sim -2\lambda \sim -4/3 \times R_S/R$. Au-delà de m^{-1} , la solution décroît exponentiellement.

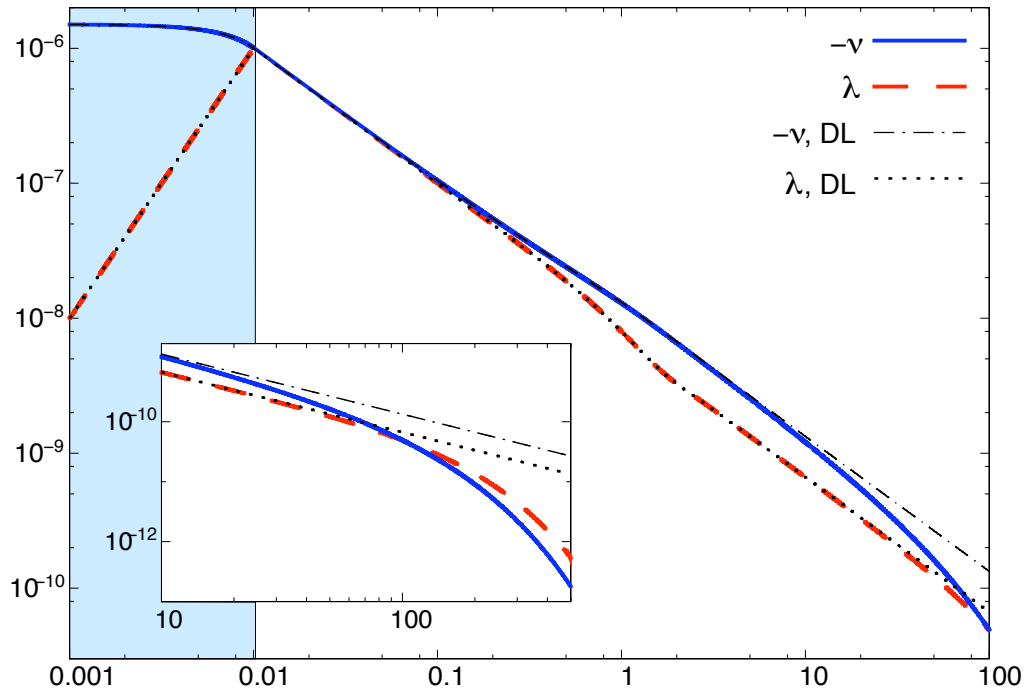


FIG. 5.1 – Graphique des fonctions $-\nu$ et λ en fonction de R/R_V , dans le cadre de la théorie complète (terme de masse d'AGS) et dans la LD, pour une source de rayon $R_\odot = 10^{-2}R_V$ et un choix de paramètres tels que $a \equiv m \times R_V = 10^{-2}$. Cette figure est extraite de l'article [28], Fig. 1.

Comparaison avec la RG : correction de Vainshtein

Nous avons vu qu'à l'intérieur du rayon de Vainshtein, les fonctions λ et ν tendent vers leur équivalent en RG, λ_{GR} et ν_{GR} , avec néanmoins un écart qui est donné théoriquement par les expressions (5.7) et (5.8). On peut confirmer numériquement que la prédiction théorique est bien vérifiée, comme le montre la Fig. 5.2 pour la fonction λ .

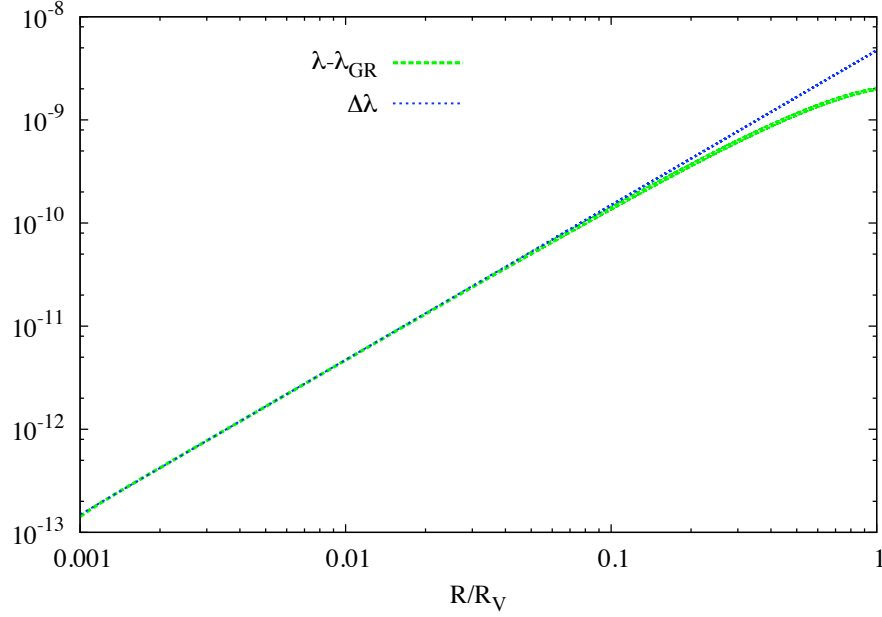


FIG. 5.2 – Graphique des fonctions $|\lambda - \lambda_{GR}|$ et $|\Delta\lambda_V| = \frac{\sqrt{2}}{3} (mR)^2 \sqrt{\frac{R_S}{R}}$ en fonction de R/R_V , pour une source de rayon $R_\odot = 10^{-3}R_V$ et un choix de paramètres tels que $a \equiv m \times R_V = 10^{-2}$. On voit que la solution numérique est en parfait accord avec la prédiction théorique de l'équation (5.8).

5.3.2 La fonction μ

Le comportement de fonction μ entre $R = 0$ et $R = m^{-1}$ est très proche de celui de la solution de la LD (5.2). Au-delà de m^{-1} , on observe la décroissance de Yukawa de la solution linéaire (3.61). Ces différents régimes sont représentés à la Fig. 5.3.

Si on regarde de plus près ce qui se passe au sein de la source, comme dans la Fig. 5.4, on observe très clairement que la solution de la théorie complète s'approche de la solution de la LD à mesure que le paramètre $a \equiv R_V \times m$ tend vers 0. On retrouve ici le fait que les corrections à la LD dues aux non-linéarités qui ne sont pas prises en compte par la LD sont d'ordre $\mathcal{O}(a^2)$ et tendent donc vers zéro lorsque $a \rightarrow 0$.

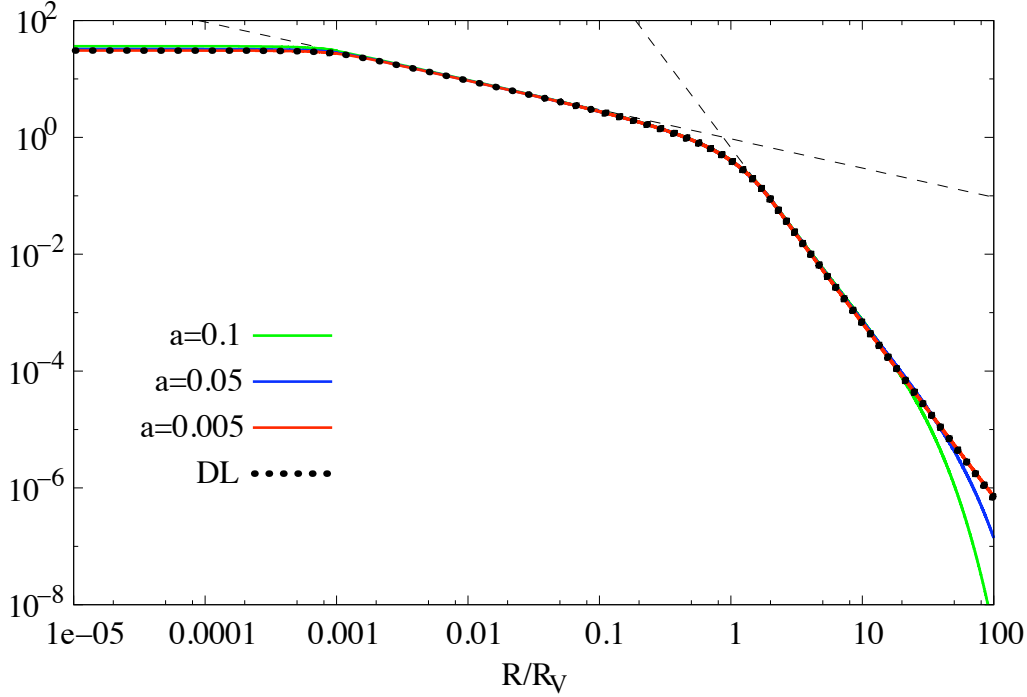


FIG. 5.3 – Graphique de la fonction $a^{-2}\mu$ (le facteur a^{-2} permet de faire correspondre les fonctions μ pour différentes valeurs de a , dans l'intervalle de distances où elles s'approchent de la LD), en fonction de R/R_V , pour une source de rayon $R_\odot = 10^{-3}R_V$, pour les trois valeurs du paramètre $a \equiv m \times R_V = 0.005, 0.05, 0.1$, ainsi que dans le cas de la LD (qui correspond à la limite $a \rightarrow 0$). On distingue très clairement les différents régimes, qui sont partagés par toutes les courbes et qui correspondent aux comportements asymptotiques de la LD (5.2). Ainsi, pour $R < R_\odot$, $\mu \sim \text{cste}$; pour $R_\odot < R \ll R_V$, $\mu \sim \sqrt{(8R_V)/(9R)}$; pour $R_V \ll R \ll m^{-1}$, $\mu \sim 2R_V^3/(3R^3)$; enfin, pour $R \gg m^{-1}$, on observe la décroissance de Yukawa du régime linéaire (3.61).

5.3.3 La pression P

Pour conclure l'étude de la solution que nous avons mise en évidence dans l'article [28], nous voudrions donner quelques indications sur l'équation d'état de la matière au sein de la source. Nous avons supposé une densité constante ρ pour des raisons de simplicité ; si l'on veut que la RG soit retrouvée à petites distances, il est important de vérifier que la pression au sein de la source est bien proche de la pression équivalente en RG. L'expression analytique de la pression pour une source de densité constante est connue en RG et prend la forme

$$P_{GR} = \rho \frac{\sqrt{1 - \frac{R_S}{R_\odot^3} R^2} - \sqrt{1 - \frac{R_S}{R_\odot}}}{3\sqrt{1 - \frac{R_S}{R_\odot}} - \sqrt{1 - \frac{R_S}{R_\odot^3} R^2}}. \quad (5.9)$$

La Figure 5.5 montre que la solution numérique est très proche de l'expression analytique (5.9), confirmant une nouvelle fois la validité de la conjecture de Vainshtein.

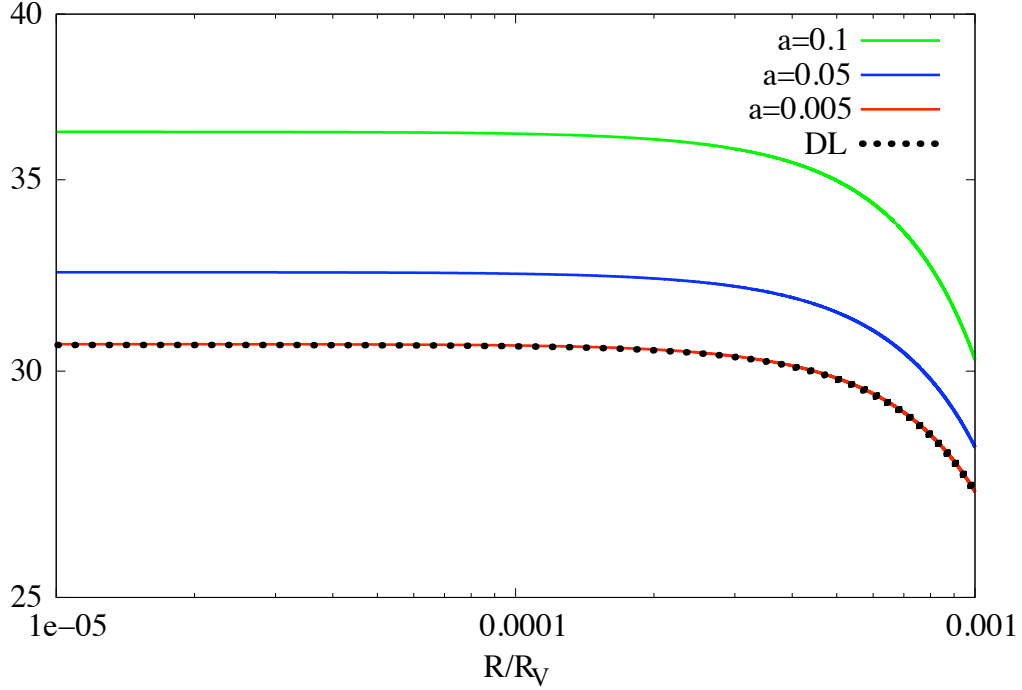


FIG. 5.4 – Graphique de la fonction $a^{-2}\mu$, en fonction de R/R_V , pour une source de rayon $R_\odot = 10^{-3}R_V$, pour les trois valeurs du paramètre $a \equiv m \times R_V = 0.005, 0.05, 0.1$, ainsi que dans le cas de la LD (qui correspond à la limite $a \rightarrow 0$). Il s'agit en fait d'un zoom de la Fig. 5.3 à l'intérieur de l'étoile. On constate que la solution de la théorie complète s'approche de la solution de la LD à mesure que le paramètre $a \equiv R_V \times m$ tend vers 0.

5.4 Un modèle simplifié de gravité massive

5.4.1 Les équations du mouvement

Pour conclure notre étude de la gravité massive, nous voudrions proposer un modèle simplifié de gravité massive, qui regroupe les caractéristiques principales de la solution mise en évidence ci-dessus. La solution étant très proche de la solution de la LD sur l'intervalle $[0, m^{-1}]$, nous voudrions bien sûr que ce modèle permette de retrouver la LD sur cet intervalle. Cependant, au-delà de m^{-1} , le terme de masse du graviton commence à jouer un rôle. Afin d'en tenir compte, on peut partir du système

$$\frac{\lambda'}{R} + \frac{\lambda}{R^2} = -\frac{m^2}{2} (\lambda + 3\mu + R\mu'), \quad (5.10)$$

$$\frac{\nu'}{R} - \frac{\lambda}{R^2} = \frac{m^2}{2} (\nu + 2\mu), \quad (5.11)$$

$$\frac{\nu'}{2R} - \frac{\lambda}{R^2} = Q(\mu, \mu', \mu''). \quad (5.12)$$

En fait, on peut se rendre compte que ce système correspond juste au système (3.5), (3.6) et (3.9), où l'on n'a gardé que les termes d'ordre le plus bas en chacune des quantités

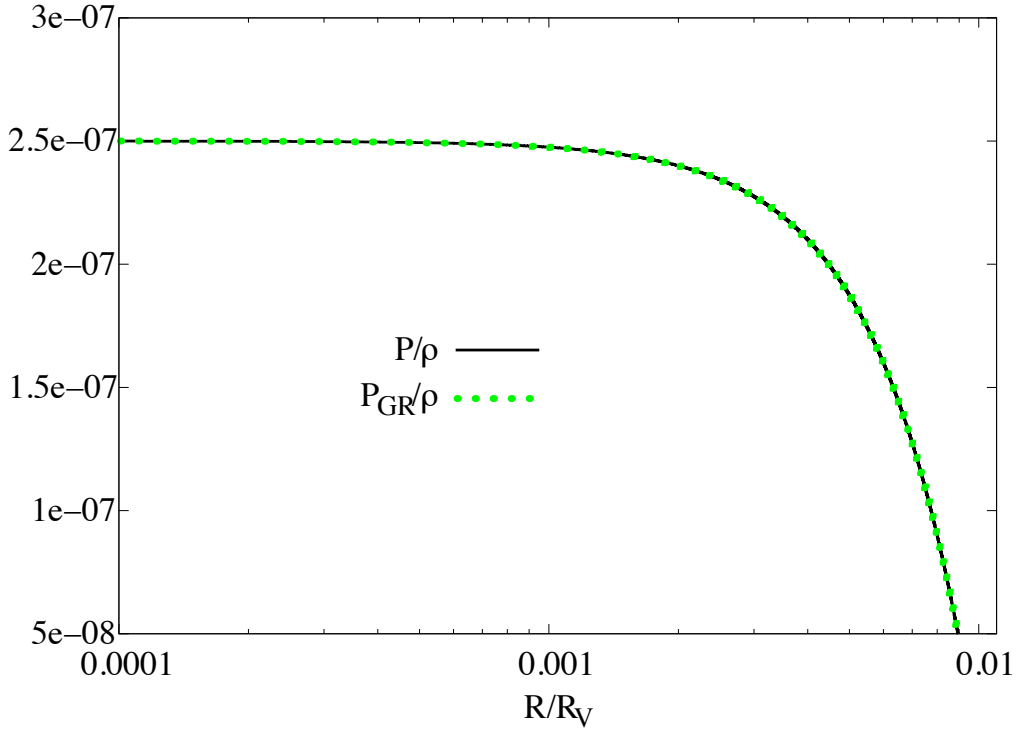


FIG. 5.5 – Graphique des fonctions P/ρ et P_{GR}/ρ , en fonction de R/R_V , pour une source de rayon $R_\odot = 10^{-2}R_V$, de densité constante ρ et un choix de paramètres tels que $a \equiv m \times R_V = 10^{-2}$. La fonction P/ρ est déterminée numériquement, tandis que P_{GR}/ρ est donnée par l'expression analytique (5.9). Les deux courbes sont indiscernables l'une de l'autre, illustrant bien le fait que l'équation d'état au sein de la source est très proche de la solution en RG, confirmant la conjecture de Vainshtein au sein de l'étoile.

λ, ν, μ , sans chercher à comparer les fonctions λ, ν, μ les unes avec les autres. Ce modèle est donc l'approximation en “champs faibles” de la gravité massive.

5.4.2 Validation numérique

On peut vérifier numériquement que la solution du système d'équations (5.10), (5.11) et (5.12) est très proche de la solution obtenue dans la théorie complète, comme le montre la Figure 5.6.

5.4.3 Obtention d'une équation pour μ seulement

Il est possible de combiner les équations (5.10-5.12) afin d'obtenir une équation pour μ seulement, similaire à l'équation (4.17) dans la LD. En utilisant (5.11), on peut exprimer λ en fonction de ν, ν' et μ ; on peut alors éliminer λ des équations (5.10) et (5.12) et obtenir

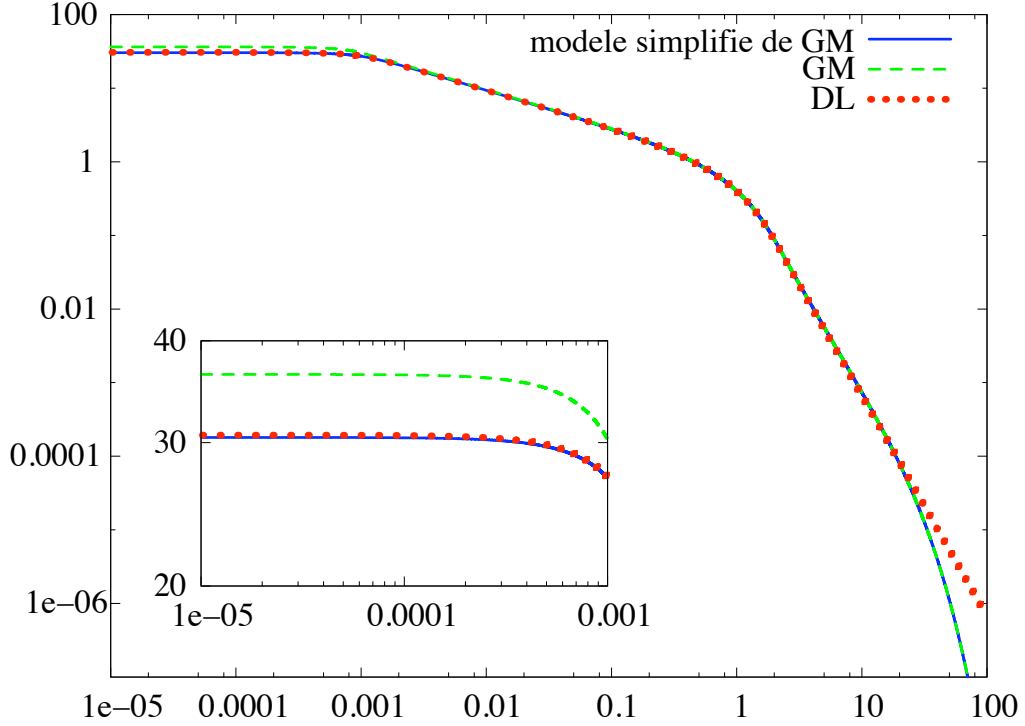


FIG. 5.6 – Graphique de la fonction $a^{-2}\mu$ (le facteur a^{-2} permet de comparer plus facilement la fonction μ avec sa valeur dans la LD), en fonction de R/R_V , pour une source de rayon $R_\odot = 10^{-3}R_V$, de densité constante ρ et un choix de paramètres tels que $a \equiv m \times R_V = 10^{-1}$. Les trois courbes représentées correspondent respectivement aux cas de la théorie complète de la GM, du modèle simplifié de GM décrit par les équations (5.10), (5.11) et (5.12), et de la LD.

deux équations ne dépendant que de ν et μ (et de leurs dérivées) :

$$\nu'' + \frac{2\nu'}{R} - \frac{1}{4}(m^2 R^2 + 6)m^2 \nu - \frac{1}{2}Rm^2 \mu' - \frac{1}{2}(m^2 R^2 + 3)m^2 \mu = 0, \quad (5.13)$$

$$-\frac{\nu'}{2R} + \frac{m^2}{2}\nu + m^2 \mu - Q = 0. \quad (5.14)$$

En dérivant (5.14) par rapport à R et en utilisant l'expression obtenue pour ν'' dans (5.13), on arrive aux deux équations

$$\begin{aligned} \frac{m^2 R^2 + 3}{R} \nu' - \frac{1}{4}(m^2 R^2 + 6)m^2 \nu + \frac{3}{2}Rm^2 \mu' \\ - \frac{1}{2}(m^2 R^2 + 3)m^2 \mu - 2R \frac{dQ}{dR} = 0, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$-\frac{\nu'}{2R} + \frac{m^2}{2}\nu + m^2 \mu - Q = 0. \quad (5.16)$$

À partir du système (5.15-5.16) ci-dessus, il est possible de déterminer ν' en fonction de μ et de ses dérivées. De même, on peut utiliser les équations (5.15-5.16) afin d'exprimer ν

en fonction de μ et de ses dérivées. Il est alors possible de dériver cette dernière équation afin d'obtenir une seconde expression pour ν' . Enfin, en comparant les deux expressions trouvées pour ν' , on obtient une équation différentielle pour μ :

$$(2 + m^2 R^2) (4Q'' - 3m^2 \mu'') + \frac{2}{R} (4 + m^2 R^2) (4Q' - 3m^2 \mu') - m^2 (m^2 R^2 + 4) (4Q - 3m^2 \mu) - m^2 Q (m^2 R^2 + 2)^2 = 0, \quad (5.17)$$

Notre modèle simplifié de gravité massive nous permet donc d'obtenir une équation unique pour μ .

Il est possible de simplifier l'équation précédente dans différentes limites. On peut ainsi retrouver l'équation linéaire (3.20) pour μ , si on fait l'hypothèse que tous les termes quadratiques Q sont négligeables. On obtient en effet

$$(2 + m^2 R^2) \mu'' + \frac{2}{R} (4 + m^2 R^2) \mu' - (m^2 R^2 + 4) m^2 \mu = 0, \quad (5.18)$$

qui est identique à l'équation (3.20). On peut également retrouver la LD en faisant l'hypothèse que μ est dominée par une puissance de R (*i.e.* $\mu \propto R^p$) et que $mR \ll 1$. L'équation (5.17) devient alors

$$(4Q'' - 3m^2 \mu'') + \frac{4}{R} (4Q' - 3m^2 \mu') = 0. \quad (5.19)$$

Il est facile d'intégrer cette équation deux fois, afin d'obtenir

$$2Q - \frac{3}{2} m^2 \mu = \frac{C_0}{R^3} + C_1. \quad (5.20)$$

On fixe la C_1 à 0, de façon à garantir que $\mu \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow +\infty$. On arrive alors exactement à l'équation (4.9) que nous avons obtenue dans la LD.

Le modèle simplifié de gravité massive que nous venons de présenter permet donc de retrouver les différents régimes que nous avons pu mettre en évidence lors de notre étude des solutions à symétrie sphérique de la gravité massive : comportement semblable à celui de la limite de découplage entre l'origine et $R \sim m^{-1}$ et régime linéaire au-delà. Le caractère simplifié du modèle, et notamment le fait de pouvoir se ramener à une seule équation pour la fonction μ en fait un excellent point de départ pour l'étude analytique des solutions à symétrie sphérique de la gravité massive, en particulier sous la forme de séries.

Pour conclure cette partie consacrée aux solutions à symétrie sphérique de la gravité massive, nous voudrions ouvrir quelques perspectives sur les prolongements possibles des résultats que nous avons présentés. Certaines de ces pistes seront étudiées dans l'article en préparation [29].

Une première suite qui pourrait être donnée à ces travaux concerne les solutions de la gravité massive autour d'objets compacts. En effet, nous avons montré l'existence de

solutions à symétrie sphérique de la GM dans le cas d'une source non-compacte. Il serait très intéressant de pouvoir conclure sur l'existence de solutions en champ fort, que ce soit au voisinage de l'horizon d'un trou noir, ou au sein d'une étoile compacte.

Une autre piste de travail, plus formelle, consisterait, dans le cas du potentiel AGS, à prouver mathématiquement l'existence d'une infinité de solutions avec le même comportement asymptotique (3.61). Nous donnons en effet dans l'Annexe C une preuve de ce résultat basée sur un développement de la solution au voisinage du comportement asymptotique (3.61). Cependant, il est sans doute possible d'aller plus loin, et de démontrer ce résultat d'une façon plus générale, en suivant un raisonnement similaire à celui suivi par J. Ecalle dans le cas de la LD [114]. En particulier, l'équation (5.17) obtenue dans le cas du modèle simplifié de gravité massive proposé à la Section 5.4 semble être un bon point de départ pour une telle démonstration, car il s'agit d'une équation pour une seule variable, dont nous comprenons bien la nature physique des différents termes.

Enfin, ces travaux sur le mécanisme de Vainshtein en gravité massive nous ont permis de mieux en comprendre les détails, ouvrant ainsi la possibilité d'utiliser ce mécanisme pour construire de nouveaux modèles de gravité modifiée. En particulier, il semble possible de se concentrer sur le secteur scalaire de la gravité massive, et de construire d'intéressants modèles dans lesquels le graviton est couplé à un scalaire qui modifie la gravité à grandes distances, tout en étant écranté par le mécanisme de Vainshtein à courtes distances. Ces modèles appartiennent à la classe plus générale des *modifications scalaires* de la gravité, vers laquelle nous nous tournons à présent.

Troisième partie

Modifications scalaires de la gravité

Chapitre 6

Modifications scalaires de la gravité

Sommaire

6.1	Théories scalaire-tenseur	176
6.1.1	Présentation des théories scalaire-tenseur	176
6.1.2	Aspects phénoménologiques et cosmologiques	178
6.2	Modèles $f(R)$	180
6.2.1	Définition du modèle	180
6.2.2	Modèle $f(R) = R - \mu^4/R$	181
6.2.3	Nécessité d'un mécanisme non-linéaire à courtes distances	182
6.3	Mécanisme de caméléon	182
6.4	Mécanisme de Vainshtein, modèles de Galiléon et théories de k-Mouflage	184
6.4.1	Modèles de Galiléon	185
6.4.2	Théories de k -Mouflage	186

Ce chapitre est consacré aux théories dans lesquelles un champ scalaire est couplé non-minimalement à la métrique et contribue à l'interaction gravitationnelle au même titre que le graviton. Nous qualifierons ces modèles de *modifications scalaires* de la gravité.

Nous présenterons tout d'abord la classe des modèles scalaire-tenseur, qui nous permettra de bien identifier le rôle du champ scalaire et de comprendre comment sa présence modifie la gravité. Nous détaillerons ensuite la phénoménologie d'un modèle scalaire-tenseur spécifique, proposé par Carroll *et al.* [62, 63], et appartenant à la catégorie des modèles dits " $f(R)$ ". Cet exemple nous permettra d'illustrer la difficulté que rencontrent beaucoup de modèles de modifications scalaires de la gravité : alors qu'influencer la cosmologie requiert un champ scalaire léger, capable de modifier les lois de la gravité aux grandes échelles, les tests locaux de la gravité imposent à ce même scalaire de ne jouer aucun rôle dans le système solaire. Cela nous amènera à présenter deux classes de modèles qui parviennent à résoudre cette tension entre tests locaux et cosmologie : les modèles de caméléon, et les théories de Galiléon et de k -Mouflage¹. Le mécanisme de caméléon consiste à donner

¹Nous reviendrons en détail sur les théories de k -Mouflage au Chapitre 7. Nous y détaillerons les résultats que nous avons présentés E. Babichev, C. Deffayet et moi-même, dans l'article [27].

une masse importante au champ scalaire au sein d'environnements à densité de matière élevée, ce qui permet au modèle de satisfaire aux contraintes dans le système solaire. Les théories de Galilée et de k -Mouflage utilisent, quant à elles, le mécanisme de Vainshtein pour écranter le champ scalaire au voisinage de sources massives.

6.1 Théories scalaire-tenseur

Dans cette section, nous souhaitons rappeler brièvement les caractéristiques importantes des théories scalaire-tenseur (ST) ; notre présentation et les notations que nous utiliserons sont fortement inspirées de celles proposées dans les références [117, 215, 230].

6.1.1 Présentation des théories scalaire-tenseur

Initialement introduites par Jordan [165, 166], Fierz [122], Brans et Dicke [50], les théories scalaire-tenseur (ST) sont des extensions de la Relativité Générale dans lesquelles un champ scalaire est couplé non-minimalement à la métrique. Contrairement aux théories de quintessence, dans lesquelles le champ scalaire se comporte comme n'importe quel champ de matière, le champ scalaire des théories ST est couplé dans l'action au scalaire de Ricci : les lois de la gravité sont alors modifiées car ce champ contribue à la force gravitationnelle, en plus du graviton.

Nous considérerons ici des théories avec un seul champ scalaire supplémentaire mais la plupart des équations que nous donnerons peuvent être assez facilement généralisées aux cas multi-champs [80].

Action dans la représentation de Jordan

L'action des théories ST dans la représentation de Jordan est telle que le champ scalaire est couplé au scalaire de Ricci² et la matière couplée universellement à la métrique [41, 206, 276]. Elle prend la forme

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left(F(\varphi) R - Z(\varphi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - 2U(\varphi) \right) + S_m[\psi_m; g_{\mu\nu}] , \quad (6.1)$$

où S_m est l'action des champs de matière ψ_m , supposée invariante par difféomorphisme. Le modèle dépend de la fonction F (que l'on supposera positive pour garantir une énergie du graviton positive) et de la fonction Z , ainsi que du potentiel U ; notons que l'on peut toujours redéfinir le champ φ pour éliminer l'une des fonctions F, Z, U .

Une paramétrisation courante est celle de Brans-Dicke dans laquelle on pose

$$F(\varphi) = 1/\varphi, \quad Z(\varphi) = \omega(\varphi)/\varphi. \quad (6.2)$$

Les modèles de Brans-Dicke proprement dits correspondent à $\omega(\varphi) = \omega_{BD} = \text{cste}$. Une autre paramétrisation souvent utilisée dans la littérature prend la forme

$$F(\varphi) \text{ quelconque}, \quad Z(\varphi) = 1. \quad (6.3)$$

²Notons qu'il est possible de coupler le champ scalaire à d'autres invariants de courbure que le scalaire de Ricci, comme le terme de Gauss-Bonnet $\mathcal{L}_{GB} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$. Nous n'étudierons pas plus avant les modèles de Gauss-Bonnet, mais renvoyons le lecteur aux références [9, 10, 175, 176, 183] pour plus de détails.

En variant l'action (6.1), on obtient

$$F(\varphi)G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} + Z(\varphi) \left[\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\alpha \varphi)^2 \right] - g_{\mu\nu} U(\varphi) + \nabla_\mu \partial_\nu F(\varphi) - g_{\mu\nu} \square F(\varphi), \quad (6.4)$$

$$Z(\varphi) \square \varphi = U_{,\varphi} - \frac{1}{2} F_{,\varphi} R - \frac{1}{2} Z_{,\varphi} (\partial_\alpha \varphi)^2, \quad (6.5)$$

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (6.6)$$

où nous avons utilisé la notation $_{,\varphi} \equiv \frac{d}{d\varphi}$. Notons que le tenseur énergie-impulsion de la matière $T_{\mu\nu}$, que nous avons défini à l'équation (1.6), est conservé par rapport à la métrique $g_{\mu\nu}$ car nous avons supposé l'action de la matière invariante par difféomorphisme. On dit alors que la matière est minimalement couplée à la métrique.

On peut voir que les termes cinétiques, pour le champ scalaire et le graviton, ne sont pas découplés dans les équations (6.4) et (6.5). L'interprétation de la théorie en terme de degrés de liberté est alors délicate³. Il est possible de redéfinir les champs de façon à éviter ce problème : on obtient alors la formulation de la théorie dans la représentation d'Einstein.

Action dans la représentation d'Einstein

Afin de diagonaliser les termes cinétiques du graviton et du champ scalaire, on effectue une transformation conforme sur la métrique :

$$g_{\mu\nu}^* \equiv F(\varphi) g_{\mu\nu}. \quad (6.7)$$

On introduit ensuite les variables et fonctions

$$\left(\frac{d\varphi_*}{d\varphi} \right)^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{d \ln F(\varphi)}{d\varphi} \right)^2 + \frac{Z(\varphi)}{2F(\varphi)}, \quad (6.8)$$

$$A(\varphi_*) = F^{-1/2}(\varphi), \quad (6.9)$$

$$2V(\varphi_*) = U(\varphi)F^{-2}(\varphi), \quad (6.10)$$

qui permettent d'obtenir l'action

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g_*} [R_* - 2g_*^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi_* \partial_\nu \varphi_* - 4V(\varphi_*)] + S_m[A^2(\varphi_*)g_{\mu\nu}^*; \psi], \quad (6.11)$$

dans laquelle le graviton $g_{\mu\nu}^*$ n'est plus couplé au champ scalaire. En revanche, on voit que dans la représentation d'Einstein, la matière est explicitement couplée au champ φ_* par l'intermédiaire de la fonction A .

On peut définir le tenseur énergie-impulsion dans la représentation d'Einstein :

$$T_*^{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g_*}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}^*}. \quad (6.12)$$

³Remarquons que l'on avait rencontré une difficulté similaire lors de l'étude de la gravité massive à la Section 2.4.2 ; en effet, les termes cinétiques du graviton et du scalaire de Stückelberg sont entremêlés dans l'action (2.92). Nous avons alors effectué la redéfinition (2.93) qui permettait de diagonaliser la partie cinétique de l'action.

Il est relié au tenseur énergie-impulsion dans la représentation de Jordan par $T_{\mu\nu}^* = A^2 T_{\mu\nu}$. On peut ensuite calculer les équations du mouvement

$$G_{\mu\nu}^* = 8\pi G T_{\mu\nu}^* + 2\partial_\mu \varphi_* \partial_\nu \varphi_* - g_{\mu\nu}^* (\partial_\alpha \varphi_*)^2 - 2g_{\mu\nu}^* V, \quad (6.13)$$

$$\square_* \varphi_* = V_{,\varphi_*} - 4\pi G \alpha(\varphi_*) T_{\mu\nu}^* g^{\mu\nu}, \quad (6.14)$$

$$\nabla_\mu^* T_{\mu\nu}^* = \alpha(\varphi_*) T_{\sigma\rho}^* g^{\sigma\rho} \partial_\nu \varphi_*. \quad (6.15)$$

La fonction α est définie par

$$\alpha(\varphi_*) \equiv \frac{d \ln A}{d\varphi_*}. \quad (6.16)$$

Il est intéressant d'introduire également sa dérivée

$$\beta(\varphi_*) \equiv \frac{d\alpha}{d\varphi_*}. \quad (6.17)$$

Le problème de Cauchy est bien posé dans la représentation d'Einstein : l'équation (6.13) contient des dérivées secondes de la métrique $g_{\mu\nu}^*$ mais ne contient que des dérivées premières de φ_* , l'inverse étant vrai pour l'équation (6.14). C'est pourquoi l'analyse de la régularité des solutions des équations du mouvement doit être faite dans la représentation d'Einstein, où le problème mathématique est bien posé [80, 117, 118]. On voit également explicitement, au travers, de l'équation (6.15) que le tenseur énergie-impulsion de la matière dans la représentation d'Einstein n'est pas conservé par rapport à la métrique $g_{\mu\nu}^*$, à cause du couplage entre les champs de matière et le champ scalaire.

6.1.2 Aspects phénoménologiques et cosmologiques

Pour poursuivre l'étude des modèles scalaire-tenseur, il faut à présent en évoquer quelques aspects phénoménologiques et cosmologiques.

Constante gravitationnelle

On peut définir, à partir du coefficient devant le scalaire de Ricci de l'action (6.1), une constante gravitationnelle effective

$$G_{\text{eff}} \equiv \frac{G}{F(\varphi)}. \quad (6.18)$$

Cependant, si l'on effectue une expérience de Cavendish pour mesurer l'équivalent de la force gravitationnelle Newtonienne F entre deux masses m_1 et m_2 séparées par une distance r , la constante gravitationnelle $G_{\text{cav}} \equiv F/(m_1 m_2)$ qui apparaît alors, prend la forme [80]

$$G_{\text{cav}} = \frac{G}{F} \left(1 + \frac{F_{,\varphi}^2}{2F + 3F_{,\varphi}^2} \right) = GA^2(1 + \alpha^2). \quad (6.19)$$

On peut montrer que le premier terme GA^2 de la seconde égalité correspond à l'échange d'un graviton, tandis que le second terme $GA^2\alpha^2$ correspond à l'échange d'un scalaire,

couplé à la matière par le biais de la fonction α . Dans la représentation de Brans-Dicke, la constante G_{cav} s'écrit

$$G_{\text{cav}} = \frac{G}{\varphi} \frac{2\omega + 4}{2\omega + 3}. \quad (6.20)$$

Dans le cas d'un champ de Brans-Dicke tel que $\omega_{BD} = 0$, c'est-à-dire dont le terme cinétique ne provient que du terme de couplage avec le tenseur de Ricci, on trouve $G_{\text{cav}} = \frac{4}{3} \frac{G}{\varphi}$. On retrouve là le facteur $4/3$ que l'on avait déjà rencontré à l'équation (2.36) lors de l'étude du régime linéaire de la gravité massive à la Section 2.2.3.

On voit que si le champ φ varie dans le temps, la constante G_{cav} varie *a priori* elle aussi. Il existe de fortes contraintes sur cette variation de la constante gravitationnelle [264, 266]

$$\left| \frac{\dot{G}_{\text{cav}}}{G_{\text{cav}}} \right|_0 < 6 \times 10^{-12} \text{ année}^{-1}, \quad (6.21)$$

où le champ φ est évalué aujourd'hui, au voisinage de la Terre⁴.

Paramètres PPN et contraintes locales

Dans le système solaire⁵, il est possible de tester les théories de la gravité au travers des paramètres PPN, qui prennent dans le cas des théories ST, la forme⁶ [80, 287, 288]

$$\gamma^{\text{ppn}} - 1 = -\frac{F_{,\varphi}^2}{ZF + 2F_{,\varphi}^2} = -2\frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2}, \quad (6.22)$$

$$\beta^{\text{ppn}} - 1 = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 \beta}{(1 + \alpha^2)^2} = \frac{1}{4} \frac{FF_{,\varphi}}{2ZF + 3F_{,\varphi}^2} \frac{d\gamma^{\text{ppn}}}{d\varphi}. \quad (6.23)$$

La mesure de la variation du décalage temporel des signaux de la sonde Cassini [288] permet de contraindre $|\gamma^{\text{ppn}} - 1| < 2.3 \times 10^{-5}$, ce qui se traduit par la contrainte sur la valeur actuelle du paramètre α

$$\alpha_0^2 \lesssim 10^{-5}. \quad (6.24)$$

Dans le cas d'un modèle de Brans-Dicke, on trouve que $\gamma^{\text{ppn}} - 1 = -1/(2 + \omega_{BD})$; la contrainte sur γ^{ppn} se traduit donc par

$$\omega_{BD} > 4.3 \times 10^4. \quad (6.25)$$

Notons que d'autres contraintes peuvent être obtenues à partir des pulsars binaires [81, 82, 116].

⁴La valeur du champ φ pouvant être différente selon les époques et les échelles considérées, il faut garder à l'esprit que cette contrainte est une contrainte "locale", à la fois dans l'espace et dans le temps.

⁵Nous renvoyons ici le lecteur à la Section 8.1.2 de ce mémoire, dans laquelle les tests de la gravité dans le système solaire sont présentés.

⁶Pour un champ φ dont la longueur de Compton dans la représentation d'Einstein est beaucoup plus grande que le système solaire [276].

Cosmologie

Les théories scalaire-tenseur ont été utilisées dans un cadre cosmologique, notamment comme alternatives à l'énergie noire dans les modèles de quintessence étendue [35, 263] et de *runaway dilaton* [88, 89, 131]. La cosmologie des modèles $f(R)$, qui sont une sous-classe des théories ST sur laquelle nous reviendrons à la Section 6.2, a également fait l'objet d'études approfondies dans la littérature.

Certains modèles ST, et notamment le modèle du *runaway dilaton*, présentent une caractéristique intéressante : ils sont attirés vers la Relativité Générale (RG) [86, 87] au cours de l'évolution cosmologique de l'Univers. Ce mécanisme d'attraction garantit que les prédictions observationnelles de ces modèles sont en accord avec la RG si l'évolution du champ scalaire a été suffisamment longue.

Les observations cosmologiques permettent de contraindre (et même de reconstruire dans une certaine mesure [48, 117]) les fonctions F, Z, U introduites dans l'action (6.1). Ainsi, la nucléosynthèse primordiale permet de contraindre [74, 90] la valeur du couplage F du champ scalaire au moment de la nucléosynthèse. L'étude des perturbations cosmologiques [48, 117] dans le cadre des théories ST permet également de contraindre les paramètres du modèle, par le biais du CMB [1, 3, 8, 32, 65, 199, 214, 222, 290, 291], de la croissance des structures et des effets de lentilles gravitationnelles faibles [1, 2, 3, 230].

6.2 Modèles $f(R)$

Nous voudrions à présent introduire une sous-classe de modèles ST qui a beaucoup attiré l'attention des cosmologistes ces dernières années : les théories $f(R)$.

6.2.1 Définition du modèle

L'idée des modèles $f(R)$ consiste à généraliser l'action d'Einstein-Hilbert en remplaçant le scalaire de Ricci par une fonction arbitraire de ce scalaire

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_m[\psi_m; g_{\mu\nu}] . \quad (6.26)$$

Cette classe de modèles a été proposée dans les années 1970 et 80 notamment par Starobinski dans le contexte de l'inflation. Elle a récemment suscité un intérêt renouvelé, suite aux articles [62, 63] dans lesquels il est montré que l'accélération de l'Univers peut être obtenue avec la fonction $f(R) = R - \mu^4/R$. Comme nous le verrons ci-dessous, ce modèle s'est révélé incompatible avec les contraintes du système solaire. Néanmoins, d'autres modèles $f(R)$ ont été proposés par la suite, qui se sont révélés viables. Parmi ceux-ci, on peut citer le modèle de Hu et Sawicki [152] et le modèle de Starobinsky [258].

La littérature qui traite de la phénoménologie des modèles $f(R)$ est très riche (on pourra par exemple se référer aux deux revues [60, 256]). En ce qui concerne les tests dans le système solaire, on pourra notamment se référer aux articles [52, 61, 152]; la question de l'existence de solutions stables au sein d'objets compacts a, quant à elle, été discutée dans les articles [31, 127, 172, 262]. Concernant les aspects cosmologiques de ces modèles, on peut citer les articles [119, 129, 204, 205, 229, 254, 294] qui s'intéressent à l'évolution du facteur d'échelle et à la croissance des structures dans le cadre des modèles $f(R)$, ainsi

qu'aux articles [208, 209, 234, 235] dans lesquels l'évolution non-linéaire des perturbations cosmologiques est étudiée numériquement.

Il est facile de voir que les modèles $f(R)$ constituent une sous-classe des théories ST. Partons pour cela de l'action [68, 259, 278, 285]

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [f(\varphi) + f'(\varphi)(R - \varphi)] + S_m[\psi_m; g_{\mu\nu}], \quad (6.27)$$

où $f'(\varphi) \equiv \frac{df}{d\varphi}$. Cette action est équivalente à celle de l'équation (6.26), à condition que $f''(\varphi) \neq 0$. En effet, en variant l'action (6.27) par rapport champ additionnel φ , qui est un multiplicateur de Lagrange, on obtient $R = \varphi$; avec cette condition, l'action (6.27) prend exactement la forme (6.26). Sous sa forme (6.27), on voit que la théorie n'est autre qu'une théorie scalaire-tenseur, avec

$$F(\varphi) = f'(\varphi), \quad Z(\varphi) = 0, \quad U(\varphi) = \frac{1}{2}[\varphi f'(\varphi) - f(\varphi)], \quad (6.28)$$

ou encore, dans la représentation d'Einstein

$$\varphi_* = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln f'(\varphi), \quad V = \frac{e^{-4\varphi_*/\sqrt{3}}}{4} \left[\varphi(\varphi_*) e^{2\varphi_*/\sqrt{3}} - f(\varphi(\varphi_*)) \right]. \quad (6.29)$$

Nous pouvons donc utiliser les contraintes que nous avons évoquées à la section précédente pour confronter les modèles $f(R)$ aux expériences.

6.2.2 Modèle $f(R) = R - \mu^4/R$

Afin d'illustrer la démarche qui consiste à appliquer les contraintes sur les ST aux modèles $f(R)$, nous pouvons nous pencher sur le modèle proposé par Carroll *et al.* (CDTT) en 2004 et défini par

$$f(R) = R - \mu^4/R. \quad (6.30)$$

L'idée de ce modèle est la suivante : pour des grandes courbures (c'est-à-dire pour des grandes densités), $R \gg \mu^2$ et l'équation (6.30) peut se simplifier en $f(R) \simeq R$. Ce régime, proche de la RG est celui qui prédomine jusqu'à la fin de l'ère de matière. La densité devient alors telle que le terme $-\mu^4/R$ ne peut plus être négligé. On peut montrer que ce terme joue alors le rôle d'une énergie noire, et que l'Univers entre dans une phase d'accélération. Pour que le modèle puisse expliquer la récente accélération de l'Univers, il faut que la transition entre les régimes de forte et faible courbure ait lieu au moment où $R \simeq H_0^2$; on doit donc avoir $\mu \simeq H_0 \simeq 2 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1} \simeq 10^{-33} \text{ eV}$.

Une fois fixé le paramètre μ , le modèle est complètement défini, et l'on peut étudier dans quelle mesure les contraintes dans le système solaire sont satisfaites. Pour cela, on peut voir le champ $\varphi_* \equiv \frac{\sqrt{3}}{2} \ln f'(\varphi)$ comme un champ de Brans-Dicke de paramètre $\omega_{BD} = 0$ [68] et quasiment sans masse à l'échelle du système solaire; cette valeur $\omega_{BD} = 0$ du paramètre de Brans-Dicke étant totalement en contradiction avec la contrainte⁷ (6.25), le modèle

⁷À proprement parler, la contrainte (6.25) est valide pour des champs de Brans-Dicke sans masse; cependant, on peut montrer [67] que pour un champ dont la longueur de Compton est beaucoup plus grande que la taille du système solaire, la contrainte sur ω_{BD} est applicable.

est totalement exclu par les tests dans le système solaire. On peut également retrouver ce résultat en considérant le paramètre γ^{ppn} qui vaut $\gamma^{\text{ppn}} = 1/2$ dans le cas du modèle CDTT, en contradiction avec les observations.

6.2.3 Nécessité d'un mécanisme non-linéaire à courtes distances

À l'évidence, le modèle CDTT n'est donc pas viable expérimentalement, et ce n'est donc pas pour ses prédictions physiques que nous avons choisi de le présenter, mais parce qu'il met en évidence les difficultés liées à la construction d'un modèle ST réaliste, capable à la fois d'être à l'origine de l'accélération de l'Univers et de passer les tests dans le système solaire. On peut voir au travers de ce modèle, qu'il existe en effet une tension entre ces deux propriétés phénoménologiques : alors que la cosmologie requiert un champ léger (c'est-à-dire de masse $m \sim H_0$) et un couplage à la matière (dans la représentation d'Einstein) d'ordre 1, les tests dans le système solaire ne peuvent être satisfaits par un champ léger qui modifie fortement les lois de la gravitation. Pour concilier ces deux régimes, il faut donc construire un modèle ST qui satisfasse au moins l'une des deux propriétés suivantes ⁸ :

- le champ scalaire est léger pour les échelles cosmologiques, mais acquiert une grande masse au voisinage de la Terre et du système solaire, ce qui lui permet de passer les tests PPN ; c'est le cas des théories de caméléon [169, 170], que nous allons présenter à Section 6.3.
- le champ scalaire est léger pour les échelles cosmologiques, mais se trouve découplé de la matière (ou est “écrané”) au voisinage de sources massives ; c'est le cas des théories dans lesquelles le mécanisme de Vainshtein intervient : théorie du Galiléon [94, 97, 203], théories de k -Mouflage [27].

6.3 Mécanisme de caméléon

Le principe du “caméléon”, modèle ST proposé par J. Khoury et A. Weltman en 2004 [169, 170], consiste à donner au champ scalaire une masse qui dépende de son environnement. Il est léger à grandes échelles et peut donc servir de champ de quintessence, tout en étant lourd à petites échelles de façon à satisfaire les contraintes du système solaire et des pulsars binaires.

Prenons l'exemple du modèle de caméléon proposé par P. Brax *et al.* [51], qui est tel que dans la représentation d'Einstein

$$V(\varphi_*) = \frac{M^4}{M_P^2} + \frac{M^{4+n}}{M_P^2} \varphi_*^{-n} \quad , \quad A(\varphi_*) = e^{\varphi_*} \quad , \quad (6.31)$$

où M a la dimension d'une masse et β est un paramètre de couplage, que l'on supposera d'ordre 1. On voit que le terme constant dans le potentiel peut jouer le rôle d'une

⁸À ce propos, on consultera avec profit le récent article [151] de Wayne Hu qui présente clairement la nécessité d'un mécanisme non-linéaire qui permette de retrouver la RG à courtes distances, que ce soit le mécanisme de caméléon ou le mécanisme de Vainshtein. Notons à ce titre que les deux mécanismes mènent à une phénoménologie différente en ce qui concerne la trajectoire des galaxies [155].

constante cosmologique, motivant ainsi l'utilisation du modèle dans un contexte cosmologique ; ce terme ne joue cependant pas de rôle à petite distances, et on peut donc le négliger dans l'analyse des contraintes locales, provenant du système solaire ou des pulsars binaires.

La caractéristique cruciale du caméléon est que la masse du champ φ_* dépend de la densité de matière ρ_m . En effet, en raison du couplage $A(\varphi_*)$ à la matière, le champ scalaire voit un potentiel effectif

$$V_{\text{eff}}(\varphi_*) = V(\varphi_*) + \frac{1}{8M_P^2} \rho_m A(\varphi_*)^4, \quad (6.32)$$

où ρ_m est la densité de la matière dans la représentation de Jordan. Ce potentiel effectif possède un minimum, comme on peut le voir sur la figure 6.1. De plus, la masse effective du champ

$$m^2 \equiv \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\varphi_*^2}(\varphi_*^{\text{min}}) \quad (6.33)$$

est telle qu'elle augmente lorsque la densité de la matière augmente (*cf.* Fig. 6.1).

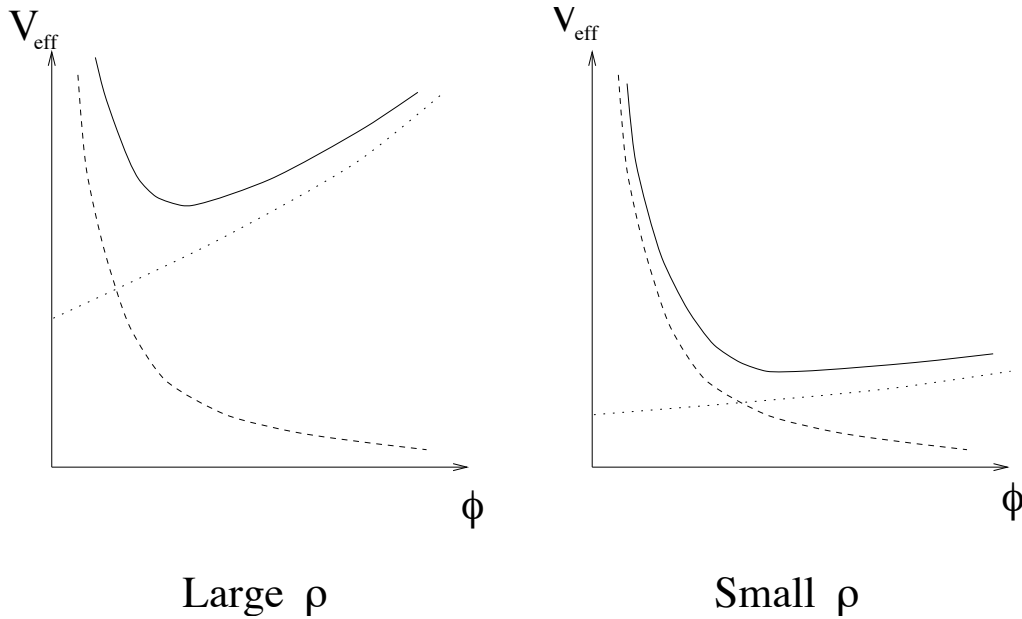


FIG. 6.1 – Potentiel effectif V_{eff} du champ φ_* dans le cas où la densité de matière est élevée, et dans le cas où elle est faible. On voit que la masse effective du champ au minimum du potentiel $m^2 \equiv \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\varphi_*^2}(\varphi_*^{\text{min}})$ augmente avec la densité de matière. Figure issue de [51].

À des échelles cosmologiques, la masse du champ scalaire est faible, et le champ est libre de se propager ; le couplage β étant d'ordre 1, la gravité est très différente de la RG, et $\gamma^{\text{ppn}} = 1/2$.

Au sein ou au voisinage immédiat d'environnements très denses (comme la Terre ou l'atmosphère), le champ est au contraire très lourd (sa portée est plus courte que les

échelles auxquelles on peut tester la gravité), de telle sorte qu'il ne joue aucun rôle dans ces environnements. Ceci est notamment vrai dans les chambres à vide dans lesquelles se déroulent les tests de la gravité en laboratoire : même si la densité de matière y est très faible, les dimensions des chambres à vide sont trop petites pour que le comportement du champ y diffère beaucoup de son comportement dans l'atmosphère, où il est très lourd. Le modèle de caméléon parvient ainsi à satisfaire les contraintes terrestres sur la gravité.

En revanche, le champ est très léger au sein du système solaire, où la densité est très faible. Dès lors, comment se fait-il que les tests PPN ne permettent pas d'exclure cette théorie? Cela est dû au phénomène dit de *coquille mince*⁹. Considérons un objet massif, de taille suffisamment importante pour que le champ soit au minimum de son potentiel au sein de l'objet (par exemple la Terre), et que le champ y soit très massif. Si l'on calcule le potentiel gravitationnel dû au champ scalaire créé à l'extérieur de la source par une coquille de rayon R et de largeur dR , il apparaît que cette contribution du scalaire est supprimée par un facteur exponentiel $e^{m(R_\odot - R)}$. On voit donc que l'intérieur de l'objet ne contribue quasiment pas, et que le potentiel n'est créé que par une très mince couche, située au niveau de la surface de la source. La force gravitationnelle est alors extrêmement proche de son équivalent en RG.

C'est ce phénomène de coquille mince qui permet au modèle de caméléon de satisfaire aux tests PPN dans le système solaire : on peut montrer [51, 169, 170] qu'il est possible de choisir les paramètres du modèle de telle sorte que le mouvement des planètes autour du Soleil et de la Lune autour de la Terre ne soit pas affecté par le champ scalaire, car seule une toute petite partie des objets massifs contribue à l'interaction gravitationnelle via ce scalaire. Notons toutefois [169, 170] que des tests de la gravité qui seraient menés dans l'espace à partir de petits objets ne bénéficieraient pas du mécanisme de coquille mince, les objets étant trop petits pour cela. Il est donc possible de détecter des écarts importants à la RG de cette façon.

Notons que mécanisme de caméléon a également été utilisé dans le cadre des théories $f(R)$ [52, 61, 152], qui comme nous l'avons vu plus haut, ont besoin d'un mécanisme qui supprime les modifications de la gravité à courtes distances.

Le caméléon est donc un mécanisme intéressant pour construire des modèles de gravité qui diffèrent fortement de la RG à grandes distances, tout en étant proche de la RG à courtes distances. Cependant, nous avons décrit à la Partie II un autre mécanisme capable de mener à une phénoménologie comparable : le mécanisme de Vainshtein. Tournons-nous à présent vers des modèles qui se basent sur ce mécanisme pour satisfaire les contraintes locales de la gravité.

6.4 Mécanisme de Vainshtein, modèles de Galiléon et théories de k -Mouflage

Nous avons présenté à la Section 2.4.4 le principe du mécanisme de Vainshtein dans le cadre de la limite de découplage (LD) de la gravité massive (GM). Nous avons ensuite montré, aux Chapitres 4 et 5, que le mécanisme de Vainshtein permettait bien à la GM de

⁹ *Thin shell* en anglais.

retrouver la RG au voisinage d'objets massifs, tout en s'en éloignant beaucoup aux grandes échelles.

L'idée principale du mécanisme de Vainshtein consiste à coupler au graviton un champ scalaire (dans le cas de la GM, il s'agit du mode scalaire du graviton massif) dont le terme d'auto-interaction dans l'action soit au moins cubique, et contienne des dérivées d'ordre supérieur à deux. Ce terme non-linéaire domine l'équation du mouvement du champ scalaire à courtes distances, écrantant l'impact gravitationnel du champ scalaire dans le système solaire. Au contraire, à grandes distances le champ scalaire se comporte comme un champ de Brans-Dicke de paramètre $\omega_{BD} = 0$: l'interaction gravitationnelle est donc profondément modifiée à ces échelles (notamment, $\gamma^{\text{ppn}} = 1/2$).

Ce mécanisme de Vainshtein est donc un ingrédient phénoménologique très intéressant pour construire un modèle réaliste de gravité modifiée. Deux classes de modèles avec un champ scalaire écranté à courtes distances par le mécanisme de Vainshtein ont récemment été proposé : les modèles de Galiléon et de k -Mouflage.

6.4.1 Modèles de Galiléon

La classe de modèles du Galiléon a été proposée en 2008 par A. Nicolis, R. Rattazzi et E. Trincherini [203] et a ensuite été généralisée d'une façon covariante dans [94, 97]. L'idée du Galiléon, inspirée de la limite de découplage du modèle DGP, est de construire une théorie ST dans laquelle l'action pour le terme scalaire contient plus que deux dérivées, mais telle que les équations du mouvement pour le scalaire soient néanmoins du second ordre. Cette condition permet en effet d'éviter la présence d'un fantôme dans la théorie. Plus précisément, l'action dans la représentation d'Einstein est de la forme

$$S = \int d^4x \sqrt{-g_*} \left(\frac{M_P^2}{2} R_* + \mathcal{L}_\pi + \mathcal{L}_m[A^2(\pi)g_{\mu\nu}^*; \psi] \right), \quad (6.34)$$

où \mathcal{L}_m est le lagrangien de la matière, qui est couplée à la métrique dans la représentation de Jordan $g_{\mu\nu} = A^2(\pi)g_{\mu\nu}^*$, et \mathcal{L}_π est le lagrangien du champ scalaire π . La fonction de couplage $A(\pi)$ est choisie de façon à retrouver le couplage de l'action (2.94) entre le scalaire et la matière, c'est-à-dire que pour des petites valeurs du champ π et du graviton $h_{\mu\nu}^* = g_{\mu\nu}^* - \eta_{\mu\nu}$, on ait

$$\mathcal{L}_m[A^2(\pi)g_{\mu\nu}^*; \psi] \simeq \frac{1}{2} h_{\mu\nu}^* T^{\mu\nu} + \pi T, \quad (6.35)$$

où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion de la matière.

Le lagrangien \mathcal{L}_π est choisi afin que les équations du mouvement pour π soient invariantes de Lorentz et ne contiennent que des dérivées d'ordre 2 de π lorsque la métrique est celle de Minkowski, et ce afin qu'aucun fantôme ne puisse se propager. On peut montrer que ce lagrangien est de la forme [97, 203]

$$\mathcal{L}_\pi = \sum_{i=1}^5 p_i \mathcal{L}_i, \quad (6.36)$$

où les p_i sont des constantes qui paramétrisent le modèle et

$$\mathcal{L}_1 = \pi, \quad (6.37)$$

$$\mathcal{L}_2 = \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi, \quad (6.38)$$

$$\mathcal{L}_3 = \square \pi \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi, \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & (\square \pi)^2 (\pi_{;\mu} \pi^{;\mu}) - 2 (\square \pi) (\pi_{;\mu} \pi^{;\mu\nu} \pi_{;\nu}) \\ & - (\pi_{;\mu\nu} \pi^{;\mu\nu}) (\pi_{;\rho} \pi^{;\rho}) + 2 (\pi_{;\mu} \pi^{;\mu\nu} \pi_{;\nu\rho} \pi^{;\rho}), \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = & (\square \pi)^3 (\pi_{;\mu} \pi^{;\mu}) - 3 (\square \pi)^2 (\pi_{;\mu} \pi^{;\mu\nu} \pi_{;\nu}) - 3 (\square \pi) (\pi_{;\mu\nu} \pi^{;\mu\nu}) (\pi_{;\rho} \pi^{;\rho}) \\ & + 6 (\square \pi) (\pi_{;\mu} \pi^{;\mu\nu} \pi_{;\nu\rho} \pi^{;\rho}) + 2 (\pi_{;\mu}^\nu \pi_{;\nu}^\rho \pi_{;\rho}^\mu) (\pi_{;\lambda} \pi^{;\lambda}) \\ & + 3 (\pi_{;\mu\nu} \pi^{;\mu\nu}) (\pi_{;\rho} \pi^{;\rho\lambda} \pi_{;\lambda}) - 6 (\pi_{;\mu} \pi^{;\mu\nu} \pi_{;\nu\rho} \pi^{;\rho\lambda} \pi_{;\lambda}), \end{aligned} \quad (6.41)$$

Le terme \mathcal{L}_2 correspond au terme cinétique standard, tandis que \mathcal{L}_3 est le terme cubique présent dans la limite de découplage du modèle DGP [188, 202]. Tous ces lagrangiens sont invariants sous la transformation “galiléenne”

$$\partial_\mu \pi \rightarrow \partial_\mu \pi + b_\mu. \quad (6.42)$$

La phénoménologie de ces modèles est intéressante : l’absence de fantôme et le mécanisme de Vainshtein leur permettent en effet d’être viable physiquement et leur cosmologie semble prometteuse [72, 249].

6.4.2 Théories de k -Mouflage

Nous avons proposé, E. Babichev, C. Deffayet et moi-même, une classe plus générale de modèles ST utilisant le mécanisme de Vainshtein pour satisfaire les contraintes locales de la gravité. Le terme non-linéaire d’auto-interaction du scalaire peut y prendre des formes très diverses, montrant ainsi le caractère générique du mécanisme de Vainshtein. Nous allons, dans le chapitre qui suit, nous pencher plus en détail sur ces théories.

Chapitre 7

Théories de k -Mouflage (article)

Sommaire

7.1	Présentation des théories de k -Mouflage	187
7.2	k -Mouflage gravity (article)	190
7.3	Perspectives et pistes de travail	200

Dans ce chapitre, nous souhaiterions présenter une nouvelle classe de théories que nous avons proposées, E. Babichev, C. Deffayet et moi-même dans l'article [27], et que nous avons appelées *théories de k -Mouflage*. Ces modèles de gravité modifiée contiennent un champ scalaire en plus du graviton usuel ; ce champ scalaire interagit fortement avec lui même au voisinage de sources massives, et s'en trouve "camouflé", c'est-à-dire qu'il ne contribue pas à l'interaction gravitationnelle. À grandes distances, au contraire, ce champ scalaire se comporte comme un champ de Brans-Dicke de paramètre $\omega_{BD} = 0$, et modifie donc radicalement la gravité à ces échelles.

La première section de ce chapitre sera consacrée à une rapide présentation de cette classe de modèles et des principaux résultats de l'article [27]. La deuxième section est constituée du texte de l'article [27] proprement dit, reproduit *in extenso*. En conclusion de ce chapitre, nous examinerons les suites possibles à donner à ce travail portant sur les modifications scalaires de la gravité.

7.1 Présentation des théories de k -Mouflage

On peut voir les théories de k -Mouflage comme une classe de théories qui généralisent la limite de découplage de la gravité massive (GM). Plus précisément, nous avons obtenu

à la Section 2.4, l'action quadratique (2.92), qui dans le cas où $A_\mu = 0$ s'écrit

$$\begin{aligned} S_2 = & \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \left\{ \left(\frac{1}{2} h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\sigma h_\mu^\sigma + \frac{1}{4} h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{4} h \square h \right) \right. \\ & + \frac{m^2}{4} [h^2 - h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - 4(h \square \phi - h_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu \phi)] \left. \right\} \\ & + \frac{1}{2} \int d^4x T_{\mu\nu} h^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Si en sus de ces termes quadratiques, on inclut les termes cubiques présents dans la limite de découplage (LD), et que dans le même temps on prend en compte le fait que la LD supprime les termes de masse de type $m^2 h^2$, on obtient l'action de la GM dans la LD pour le graviton $h_{\mu\nu}$ et le scalaire ϕ :

$$\begin{aligned} S = & \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \left\{ \left(\frac{1}{2} h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\sigma h_\mu^\sigma + \frac{1}{4} h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{4} h \square h \right) \right. \\ & + m^2 [(h_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu \phi - h \square \phi + \alpha (\square \phi)^3 + \beta (\square \phi \phi_{;\mu\nu} \phi^{;\mu\nu}))] \left. \right\} \\ & + \frac{1}{2} \int d^4x T_{\mu\nu} h^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Le principe des théories de k -Moufflage consiste d'une part à généraliser le terme non-linéaire

$$H(\phi) = \frac{\alpha}{2} (\square \phi)^3 + \frac{\beta}{2} (\square \phi \phi_{;\mu\nu} \phi^{;\mu\nu}), \quad (7.3)$$

et d'autre part à étendre l'action (7.2) ci-dessus d'une façon covariante.

L'action générale des théories de k -Moufflage prend donc la forme [27]

$$S = M_P^2 \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2} + \frac{\gamma}{2} m^2 \phi R + m^2 H(\phi) \right) + S_m, \quad (7.4)$$

où $H(\phi)$ est un terme au moins cubique en ϕ et qui contient plus que deux dérivées, et S_m est l'action pour la matière que l'on supposera minimalement couplée à la métrique $g_{\mu\nu}$ (γ est un paramètre d'ordre 1).

Nous considérerons dans l'article [27] plusieurs choix pour $H(\phi)$:

$$H(\phi)_{MG} = \frac{\alpha}{2} (\square \phi)^3 + \frac{\beta}{2} (\square \phi \phi_{;\mu\nu} \phi^{;\mu\nu}), \quad (7.5)$$

$$H(\phi)_{DGP} = m^2 \square \phi \phi_{;\mu} \phi^{;\mu}, \quad (7.6)$$

$$H(\phi)_K = K(X), \quad \text{with } X = m^2 \phi_{;\mu} \phi^{;\mu}, \quad (7.7)$$

$$H(\phi)_{Gal} = m^2 \left(\phi_{;\lambda} \phi^{;\lambda} \right) \left[2 (\square \phi)^2 - 2 (\phi_{;\mu\nu} \phi^{;\mu\nu}) \right], \quad (7.8)$$

$$H(\phi)_{CovGal} = m^2 \left(\phi_{;\lambda} \phi^{;\lambda} \right) \left[2 (\square \phi)^2 - 2 (\phi_{;\mu\nu} \phi^{;\mu\nu}) - \frac{1}{2} (\phi_{;\mu} \phi^{;\mu}) R \right]. \quad (7.9)$$

Le premier choix correspond à la structure du terme d'auto-interaction du scalaire ϕ de la LD de la GM; le second correspond au terme d'ordre supérieur du modèle DGP; le

terme H_K (qui est tel que $\partial_X K(X)|_{X=0} = 0$), fait référence aux modèles de k -essence¹ [22, 23, 24, 69]; le quatrième cas correspond au Galiléon [203], tandis que le dernier terme renvoie au modèle covariant de Galiléon proposé dans [94, 97]. La liste des termes H ci-dessus n'est pas exhaustive, mais illustre déjà la variété des modèles que la classe des théories de k -Mouflage peut décrire.

D'une façon similaire à la gravité massive, les modèles de k -Mouflage possèdent deux régimes très différents : à grande distance de toute source massive, le champ ϕ se comporte comme un champ de Brans-Dicke de paramètre $\omega_{BD} = 0$ et modifie donc la gravité ; à l'inverse, au voisinage d'un corps massif, le terme non-linéaire provenant de $H(\phi)$ domine l'équation du mouvement du scalaire, et "camoufle" le champ : la RG est retrouvée.

Le terme dominant du terme d'interaction H est de la forme

$$H(\phi)_{dom} \sim m^{2N_f - N_d} \partial^{N_d} \phi^{N_f},$$

où N_f et N_d sont des entiers. On peut alors montrer que la transition entre les régimes linéaire et non-linéaire a lieu au rayon "de Vainshtein"

$$R_{V,H} \equiv \left(R_S^{N_f - 2} m^{2 - N_d} \right)^{\frac{1}{N_f + N_d - 4}}.$$

Nous montrons dans l'article [27] qu'il est possible de trouver des solutions à symétrie sphérique en présence d'une source dans le cadre des théories de k -Mouflage, et en particulier pour les cas où $H = H_{MG}$, $H = H_{DGP}$ et $H = H_K(X) \propto X^2$. Ces solutions à symétrie sphérique sont telles que le scalaire est écranté à courtes distances, permettant ainsi à ces solutions d'être en accord avec les tests de la gravité dans le système solaire. À grandes distances, le scalaire contribue pleinement, comme on peut le voir sur la figure 1 de [27] : au-delà du rayon de Vainshtein, $\gamma^{\text{ppn}} = 1/2$ (ce qui est équivalent à $\nu = -2\lambda$, où ν et λ sont définis à l'équation (2.67)).

Ces résultats démontrent que le mécanisme de Vainshtein peut s'appliquer pour un très large spectre de théories, y compris lorsque celles-ci n'ont pas de rapport avec les théories de gravité massive, pour lesquelles ce mécanisme avait été proposé initialement. On pensera en particulier au modèle de l'équation 7.7, inspiré des termes cinétiques non-standards des modèles de k -essence, et qui semble *a priori* très éloigné de la gravité massive ou des modèles branaires. Ce caractère générique du mécanisme de Vainshtein ouvre donc de très intéressantes perspectives pour la construction de modèles réalistes de gravité modifiée, dans le prolongement de l'article [27], que nous reproduisons à présent dans son intégralité.

¹Il est cependant important de noter que le modèle proposé ici est très différent d'un modèle de k -essence ; en particulier, dans la représentation d'Einstein, la matière est couplée à une métrique qui dépend de ϕ . Le nom k -essence ne renvoie donc qu'à la forme non standard du terme cinétique.

7.2 k -Mouflage gravity (article)

Nous reproduisons à présent l'article [27] intitulé "*k-Mouflage gravity*". E. Babichev, C. Deffayet et moi-même avons écrit cet article dans le cadre du concours 2009 de la *Gravity Research Foundation*, où il a remporté une mention honorable. Il a accepté pour publication dans journal *International Journal of Modern Physics D* (les auteurs des articles ayant reçu une mention honorable au concours étant invités à soumettre leur article à ce journal) et est pour l'instant disponible sur le serveur d'archives arXiv sous la référence [[arXiv:0905.2943](https://arxiv.org/abs/0905.2943) (gr-qc)].

k-Mouflage gravity

E. Babichev¹, C. Deffayet², R. Ziour³
*APC⁴, 10 rue Alice Domon et Léonie Duquet,
 75205 Paris Cedex 13, France.*

Abstract

We introduce a large class of scalar-tensor theories where gravity becomes stronger at large distances via the exchange of a scalar that mixes with the graviton. At small distances, i.e. large curvature, the scalar is screened via an analog of the Vainshtein mechanism of massive gravity. The crossover distance between the two regimes can be made cosmological by an appropriate choice of the parameters.

*Essay written for the Gravity Research Foundation 2009 Awards for
 Essays on Gravitation, awarded a honorable mention*

¹babichev@apc.univ-paris7.fr

²deffayet@iap.fr

³ziour@apc.univ-paris7.fr

⁴UMR 7164 (CNRS, Université Paris 7 Denis Diderot, CEA, Observatoire de Paris)

There has been recently a renewal of interest for theories where gravity is modified at large, cosmological, distances. This is due in part to the wish to find explanations to the observed acceleration of the expansion of the Universe not relying on a new dark component. One prototypical example of such theories is DGP gravity [1] with its interesting cosmological consequences [2, 3]. Other motivations exist, like the dark matter puzzle [4] or recent observations made in Ref. [5]. It is however notoriously difficult to modify General Relativity (GR in the following) at large distance in a consistent way without spoiling the very good agreement between GR and various experiments and observations, in particular those of the motion of solar system bodies as well as strong field tests relying on binary pulsars (see e.g. [6]). Besides DGP gravity (which suffers in particular from unsolved questions related to its UV completion), degeneration models and some related proposals [7], some other classes of models have been considered with some details: e.g. the Chameleon models [8], or the – equivalent to scalar-tensor – $f(R)$ [9]. What we really need is some theory that behaves as GR in the strong field limit as well as for weak fields appropriate to describe gravity in the solar system, while it deviates from GR in some ultra-weak field limit.

A theory which was thought to have similar properties is nonlinear massive gravity, first considered in the context of strong interactions [10]. It can be defined as a bimetric theory, where one of the metrics, say $g_{\mu\nu}$, is dynamical (with an Einstein-Hilbert action) and minimally coupled to matter, while the other, say $f_{\mu\nu}$, is non dynamical and couples to $g_{\mu\nu}$ (see e.g. [11]). The coupling between the two metrics is chosen such that, expanding around flat space-time, one recovers at quadratic order the Pauli-Fierz action [12], the only consistent action for a massive spin two. A massive graviton has 5 propagating polarizations, among which a scalar mode responsible for an extra attraction felt by non relativistic sources. This scalar mode, if one only uses the quadratic Pauli-Fierz action, leads to order one difference in PPN parameters from those of General Relativity, irrespectively of the smallness of the graviton mass (this is the famous vDVZ discontinuity [13]). However it was argued some time ago that the scalar polarization could hide itself in strong enough field configurations via the so-called Vainshtein mechanism [14]. This relies on the observation that the theory has hidden derivative self interactions in the scalar sector that shuts off the effect of the scalar attraction at distances smaller than the so-called Vainshtein radius R_V [15, 16]. This radius, defined by $R_V = m^{-4/5} R_S^{1/5}$ in terms of the graviton mass m and the standard Schwarzschild radius of the source R_S , can be very large; e.g. it is much larger than the solar system for a graviton of Hubble radius Compton length. The Vainshtein mechanism was argued to fail in nonlinear massive gravity [17, 18], a theory which anyway suffers from ghost-like instabilities [19]. However, it was recently observed explicitly [20], building on some previous qualitative arguments [16, 21, 22], that it does work in some limit of this theory where one only keeps the dominant derivative self interactions of the scalar sector, the so called "Decoupling Limit" (DL in the following).

In this essay, we propose a general structure for a large class of scalar-tensor theories, in which the scalar field "camouflages" in strong enough gravitational fields,

via a derivative self-interaction⁵. Note however that to obtain this effect, the gravitational field does not need to be very strong and, similarly to massive gravity, it can already happen in the solar system. The structure of our scalar tensor theories follows closely the one of the DL of nonlinear massive gravity and, before introducing the former, we remind some crucial properties of the latter.

In nonlinear massive gravity, the metric field equations read

$$M_P^2 G_{\mu\nu} = (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^g), \quad (1)$$

where $G_{\mu\nu}$ denotes the Einstein tensor computed with the metric $g_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}$ is the matter energy momentum tensor, and $T_{\mu\nu}^g$ is an effective energy momentum tensor coming from the interaction between metrics. It depends non derivatively on $f_{\mu\nu}$ and $g_{\mu\nu}$. Taking a g -covariant derivative of Eq.(1) we obtain the constraint

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^g = 0 \quad (2)$$

which $T_{\mu\nu}^g$ should obey. Following Ref. [14, 17] one can then look at spherically symmetric solutions, aimed for example at describing the metric around stars, using the ansatz

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -e^{\nu(R)} dt^2 + e^{\lambda(R)} dR^2 + R^2 d\Omega^2, \quad (3)$$

$$f_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + \left(1 - \frac{R\mu'(R)}{2}\right)^2 e^{-\mu(R)} dR^2 + e^{-\mu(R)} R^2 d\Omega^2, \quad (4)$$

where a prime denotes a derivation w.r.t. the radial coordinate R . With such an ansatz, $g_{\mu\nu}$ is easy to compare with the standard form of Schwarzschild solution, while $f_{\mu\nu}$ describes a Minkowski space-time in some unusual coordinate system, parametrized by the function μ to be determined. In the DL, the system of equation to be solved, Eqs. (1-2) collapses to [20]

$$\frac{\lambda'}{R} + \frac{\lambda}{R^2} = -\frac{1}{2}m^2(3\mu + R\mu') + \frac{\rho}{M_P^2}, \quad (5)$$

$$\frac{\nu'}{R} - \frac{\lambda}{R^2} = m^2\mu, \quad (6)$$

$$\frac{\lambda}{R^2} - \frac{\nu'}{2R} = Q(\mu), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &\equiv -\frac{1}{2R} \left\{ 3\alpha \left(6\mu\mu' + 2R\mu'^2 + \frac{3}{2}R\mu\mu'' + \frac{1}{2}R^2\mu'\mu'' \right) \right. \\ &\quad \left. + \beta \left(10\mu\mu' + 5R\mu'^2 + \frac{5}{2}R\mu\mu'' + \frac{3}{2}R^2\mu'\mu'' \right) \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

where ρ represents the source energy density, and $Q(\mu)$ contains the only left over nonlinearities parametrized by α and β . This parametrization covers all the possible interaction terms between the metrics [20]. In the DL, those nonlinearities

⁵Hence the title of this essay, where "k" refers to "kinetic".

only appear in equation (2), which is there equivalent to Eq. (7). The first two equations (5-6) correspond to taking the DL in equation (1). $Q(\mu)$ corresponds to the strongest scalar derivative self interactions of the model [20]. These interactions, when expressed in term of canonically normalized fields, are suppressed by a scale $\Lambda = m^{4/5} M_P^{1/5}$ [16] that can be made here explicit by rescaling the fields as $\nu \rightarrow M_P^{-1} \nu$, $\lambda \rightarrow M_P^{-1} \lambda$, $\mu \rightarrow M_P^{-1} m^{-2} \mu$, in which case the right hand side of equation (7) simply appears as divided by Λ . In fact the DL is simply obtained by using those rescaled fields in the original equations (1-2) and letting $M_P \rightarrow \infty$, $m \rightarrow 0$, while keeping Λ (as well as $T_{\mu\nu}/M_P$) fixed. It is expected to give a good description of the solution in the range $R_0 \ll R \ll m^{-1}$, where R_0 is a distance scale that can be made parametrically lower than R_V , and even extend down to the Schwarzschild radius [22, 20]. The structure of equations (5-7) can be understood from the flat space-time action

$$S = \frac{M_P^2}{8} \int d^4x \left\{ 2h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h - 2h^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\sigma h_\mu^\sigma + h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} - h \square h \right. \\ \left. + m^2 [4(h_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu \phi - h \square \phi) + 4\alpha (\square \phi)^3 + 4\beta (\square \phi \phi_{,\mu\nu} \phi^{,\mu\nu})] \right\} \quad (9) \\ + \frac{1}{2} \int d^4x T_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$$

for the dynamical field $h_{\mu\nu}$ and ϕ . Indeed, using the identifications [20]

$$h_{\mu\nu} \equiv \{\lambda, \nu\}, \quad (10)$$

$$\mu = -2\phi'/R, \quad (11)$$

$h_{\mu\nu}$ field equations correspond to Eqs. (5-6) while the one for ϕ correspond to Eq. (7). The peculiarity of action (9) is that ϕ does only get a kinetic term via a mixing with $h_{\mu\nu}$ [16], this being entirely due to the structure of the Pauli-Fierz mass term. Outside of a source and at large distances, the nonlinearities $Q(\mu)$ can be neglected, and one finds that the system (5-7) is solved by

$$\lambda \sim \frac{\mathcal{C}}{2R}, \quad \nu \sim -\frac{\mathcal{C}}{R}, \quad \mu \sim \frac{1}{(mR)^2} \frac{\mathcal{C}}{2R}. \quad (12)$$

where \mathcal{C} is a constant of integration expected to be proportional to G_N and to be fixed by matching to the source. Notice that one has $\nu \sim -2\lambda$, in contrast with the GR result, this being due to the scalar exchange. The behaviour (12) is valid for $R \gg R_V$. Below R_V , inspection of equations (5-7) shows that the nonlinear term $Q(\mu)$ dominates over the terms linear in μ and at the same time is of the order of $\lambda'/R \sim \lambda/R^2 \sim \nu'/R$. Hence, for $R \ll R_V$, one can neglect the terms linear in μ in front of those in the left hand side of equations (5) and (6), and as a result, one recovers linearized General Relativity (obtained for $m^2 = 0$). This is the essence of the Vainshtein mechanism, and it was explicitly shown to work this way by solving numerically the system of equations (5-7) [20]. Having this in mind, one can design a large class of scalar tensor theories in which one expects to have large distance modification of GR, but a small distance recovery *à la* Vainshtein.

Indeed, a covariantization of action (9) is given by

$$S = M_P^2 \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2} + \frac{\gamma}{2} m^2 \phi R + m^2 H(\phi) \right) + S_m, \quad (13)$$

where $H(\phi)$ is some derivative (covariant and higher than quadratic) self interactions for ϕ that will be discussed below, and S_m represents the action for matter assumed to be minimally coupled to $g_{\mu\nu}$ (γ is some order one parameter). These theories can of course always be written in an Einstein frame. When expanded around flat space time and $\phi = 0$, action (13) reproduces (9) at quadratic order. It also contains derivative self interactions of ϕ similar to those left over in the DL of massive gravity and encoded into the function H . Some possible choices for H are following:

$$H(\phi)_{MG} = \frac{\alpha}{2} (\Box \phi^3) + \frac{\beta}{2} (\Box \phi \phi_{;\mu\nu} \phi^{;\mu\nu}), \quad (14)$$

$$H(\phi)_{DGP} = m^2 \Box \phi \phi_{;\mu} \phi^{;\mu}, \quad (15)$$

$$H(\phi)_K = K(X), \quad \text{with } X = m^2 \phi_{;\mu} \phi^{;\mu}, \quad (16)$$

$$H(\phi)_{Gal} = m^2 (\phi_{;\lambda} \phi^{;\lambda}) [2 (\Box \phi)^2 - 2 (\phi_{;\mu\nu} \phi^{;\mu\nu})], \quad (17)$$

$$H(\phi)_{CovGal} = m^2 (\phi_{;\lambda} \phi^{;\lambda}) \left[2 (\Box \phi)^2 - 2 (\phi_{;\mu\nu} \phi^{;\mu\nu}) - \frac{1}{2} (\phi_{;\mu} \phi^{;\mu}) R \right]. \quad (18)$$

The first choice is reproducing the structure of the self derivative of ϕ arising in the DL of massive gravity; the second choice does the same for DGP gravity [23, 24]⁶; the third possibility, H_K (chosen such that $\partial_X K(X)|_{X=0} = 0$), corresponds to K-essence-like models⁷ [25]; the fourth case corresponds to the Galileon model [26], while the last case is the same model with an appropriate non minimal coupling to curvature removing higher derivatives in the e.o.m. [27] (see also [28]). The metric field equations obtained from (13) read

$$G_{\mu\nu} (1 + \gamma m^2 \phi) + \gamma m^2 (g_{\mu\nu} \Box \phi - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi) + m^2 T_{\mu\nu}^{(\phi)} = M_P^{-2} T_{\mu\nu}, \quad (19)$$

where $T_{\mu\nu}^{(\phi)}$ comes from varying $H(\phi)$. The scalar field e.o.m. is

$$\frac{1}{2} \gamma R + \mathcal{E}_\phi = 0 \quad (20)$$

where \mathcal{E}_ϕ come from varying $H(\phi)$ w.r.t. ϕ . What is first interesting to notice is that all the models defined by (13) and their corresponding H have a "Vainshtein radius" and a "decoupling limit" which isolates the strongest scalar self interaction. This interaction reads schematically

$$H(\phi)_{dom} \sim m^{2N_f - N_d} \partial^{N_d} \phi^{N_f},$$

⁶Note added after this work was submitted to the 2009 Gravity Research Foundation Essay Competition (March 31st 2009): the recent arXiv submission [32] considers aspects of the cosmology associated to a model close to (15) (see also [33]).

⁷With however the important difference that in the Einstein frame, matter couples to a metric which depends on ϕ .

with N_d and N_f integers. Using then the scaling (12) which also applies here, as well as (10-11), one has

$$\frac{H(\phi)}{h\Box\phi} \sim \left(\frac{R_{V,H}}{R}\right)^{N_f+N_d-4},$$

where we obtained the Vainshtein radius corresponding to the model H as

$$R_{V,H} \equiv \left(R_S^{N_f-2} m^{2-N_d}\right)^{\frac{1}{N_f+N_d-4}}.$$

In the DL, and for spherical symmetry, equations (19) reduce to (5-6), while Eq. (20), once integrated once, leads to an equation analogous to (7)⁸. The DL can be used as a starting point for a numerical integration of the full nonlinear e.o.m. However, it is highly non trivial that non singular solutions found in the DL will carry into non singular solutions of the full theory, as we learned from nonlinear massive gravity [17, 20].

One of the main result reported here is that we were able to find non singular numerical solutions of the full system (19-20) with sources, for some particular choices of H . Those solutions show a recovery *à la* Vainshtein of GR below the respective Vainshtein radii. Our expectation is that such solutions will also exist for a large subclass of "k-Mouflage" type of models to be determined⁹. Figure 1 shows for example some of the results of the integration of the full nonlinear system for a simple H_K given by $H_K(X) \propto X^2$ as well as for H_{DGP} . Notice in particular that the H_{DGP} model has the interesting property that it has the same Vainshtein radius as the original DGP model as well as PPN corrections inside the solar system.

Various issues are left for future works. One obvious question, not to mention possible troubles with superluminal propagations (see e.g. the different points of Refs. [30, 31]), has to do with the stability of the different model considered. E.g. it is clear that the choices (14) and (17) leads to higher derivative field equations (see [27] for what concerns (17)), and hence unstable modes. Higher derivative, however, would not appear for the other choices, but this by itself does not ensure stability of the model. It is also clear that the model considered here should be UV completed in some appropriate way. The situation is the same as for DGP gravity, Galileons, or generic models of K-essence and one should worry about the low scale associated with the dominant scalar interaction. We believe however that the framework presented here, if only phenomenological, should allow various novel effects of large distance modification of gravity to be investigated in a cosmological context, a task that is certainly worth pursuing.

⁸The required integration comes from the relation (11).

⁹Note that such non singular (and in this case higher dimensional) solutions are not known explicitly in the original DGP model, where only approximate or DL solutions have been obtained [15, 29, 24].

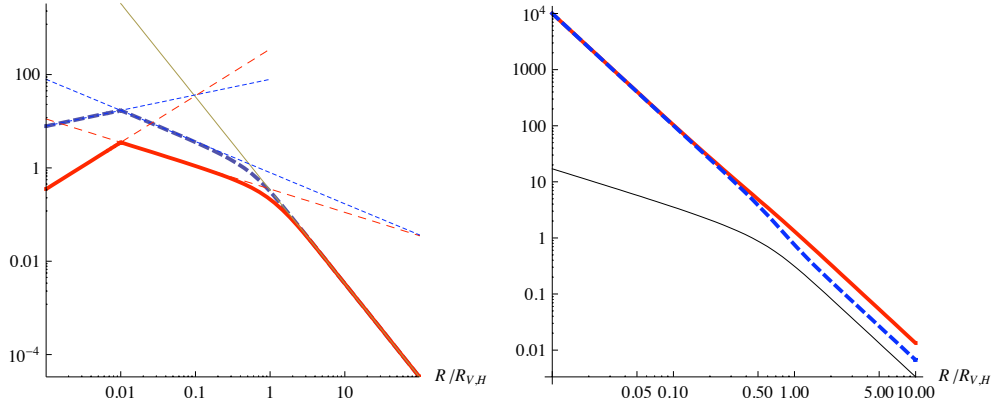


Figure 1: Left figure shows the derivative of the scalar field, ϕ' , in the presence of a source of radius $R = 0.01$ (in the unit of the Vainshtein radii of the models) for $H \equiv H_K(X) \propto X^2$ (dashed blue curve), and $H = H_{DGP}$ (red solid line). The different asymptotic regimes are shown by thin lines. One sees in particular the transition happening at the Vainshtein radii $R_{V,H}$. The right plot shows the derivative of the functions λ and ν , λ' (dashed blue curve) and ν' (red solid curve), appearing in the spherically symmetric ansatz (3), along with ϕ' (thin black curve), for the $H \equiv H_K(X) \propto X^2$ model and outside the source. One sees the transition between GR regime ($R \ll R_{V,H}$) and the scalar-tensor regime ($R \gg R_{V,H}$). Below $R_{V,H}$ the scalar field "camouflages", i.e. its contribution becomes subdominant.

Acknowledgments

The work of E.B. was supported by the EU FP6 Marie Curie Research and Training Network UniverseNet (MRTN-CT-2006-035863). We thank Gilles Esposito-Farese for interesting discussions.

References

- [1] G. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, Phys. Lett. **B485** (2000) 208 [arXiv:hep-th/0005016].
- [2] C. Deffayet, Phys. Lett. B **502**, 199 (2001) [hep-th/0010186].
- [3] C. Deffayet, G. R. Dvali and G. Gabadadze, Phys. Rev. D **65** (2002) 044023 [arXiv:astro-ph/0105068].
- [4] M. Milgrom, Astrophys. J. **270**, 365 (1983).
- [5] N. Afshordi, G. Geshnizjani and J. Khoury, arXiv:0812.2244 [astro-ph].
- [6] C. M. Will, Living Rev. Rel. **9** (2005) 3 [arXiv:gr-qc/0510072].
- [7] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali and G. Gabadadze, arXiv:hep-th/0209227; G. Dvali, S. Hofmann and J. Khoury, Phys. Rev. D **76**, 084006 (2007) [arXiv:hep-th/0703027].
- [8] J. Khoury and A. Weltman, Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 171104 [arXiv:astro-ph/0309300].
- [9] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden and M. S. Turner, Phys. Rev. D **70** (2004) 043528 [arXiv:astro-ph/0306438].
- [10] C. J. Isham, A. Salam and J. Strathdee, Phys. Rev. D **3** (1971) 867.
- [11] T. Damour and I. I. Kogan, Phys. Rev. D **66** (2002) 104024 [arXiv:hep-th/0206042].
- [12] M. Fierz, Helv. Phys. Acta **12** (1939) 3; M. Fierz and W. Pauli, Proc. Roy. Soc. Lond. A **173**, 211 (1939).
- [13] H. van Dam and M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. B **22**, 397 (1970). V. I. Zakharov, JETP Lett. **12**, 312 (1970) . Y. Iwasaki, Phys. Rev. D **2** (1970) 2255.
- [14] A. I. Vainshtein, Phys. Lett. B **39** (1972) 393.
- [15] C. Deffayet, G. R. Dvali, G. Gabadadze and A. I. Vainshtein, Phys. Rev. D **65**, 044026 (2002) [arXiv:hep-th/0106001].
- [16] N. Arkani-Hamed, H. Georgi and M. D. Schwartz, Annals Phys. **305**, 96 (2003) [arXiv:hep-th/0210184].
- [17] T. Damour, I. I. Kogan and A. Papazoglou, Phys. Rev. D **67** (2003) 064009 [arXiv:hep-th/0212155].
- [18] J. H. Jun and I. Kang, Phys. Rev. D **34** (1986) 1005.
- [19] D. G. Boulware and S. Deser, Phys. Rev. D **6**, 3368 (1972).

- [20] E. Babichev, C. Deffayet and R. Ziour, arXiv:0901.0393 [hep-th], to appear in JHEP.
- [21] C. Deffayet and J. W. Rombouts, Phys. Rev. D **72**, 044003 (2005) [arXiv:gr-qc/0505134].
- [22] P. Creminelli, A. Nicolis, M. Papucci and E. Trincherini, JHEP **0509** (2005) 003 [arXiv:hep-th/0505147].
- [23] M. A. Luty, M. Porrati and R. Rattazzi, JHEP **0309**, 029 (2003) [arXiv:hep-th/0303116].
- [24] A. Nicolis and R. Rattazzi, JHEP **0406**, 059 (2004) [arXiv:hep-th/0404159].
- [25] C. Armendariz-Picon, T. Damour and V. F. Mukhanov, Phys. Lett. B **458** (1999) 209 [arXiv:hep-th/9904075].
- [26] A. Nicolis, R. Rattazzi and E. Trincherini, arXiv:0811.2197 [hep-th].
- [27] C. Deffayet, G. Esposito-Farese and A. Vikman, arXiv:0901.1314 [hep-th], to appear in Phys. Rev. **D**.
- [28] C. Deffayet, S. Deser, G. Esposito-Farese, in preparation.
- [29] A. Gruzinov, New Astron. **10** (2005) 311 [arXiv:astro-ph/0112246].
- [30] A. Adams, N. Arkani-Hamed, S. Dubovsky, A. Nicolis and R. Rattazzi, JHEP **0610** (2006) 014 [arXiv:hep-th/0602178].
- [31] E. Babichev, V. Mukhanov and A. Vikman, JHEP **0802**, 101 (2008) [arXiv:0708.0561 [hep-th]].
- [32] N. Chow and J. Khoury, arXiv:0905.1325 [hep-th].
- [33] C. Deffayet, O. Pujolas, I. Sawicki and A. Vikman, in preparation.

7.3 Perspectives et pistes de travail

Pour conclure cette partie consacrée aux modifications scalaires de la gravité et aux théories de k -Mouflage, nous voudrions évoquer quelques pistes de travail qui nous semblent prometteuses, dans le prolongement des résultats que nous venons de présenter :

- en premier lieu, il serait intéressant d’étudier d’une manière systématique l’existence de solutions à symétrie sphérique dans les théories de k -Mouflage. Pour l’instant, nous avons montré que de telles solutions existaient pour certains modèles spécifiques, mais on pourrait envisager de déterminer les conditions générales qui garantissent l’existence du mécanisme de Vainshtein dans cette classe de théories.
- La question de l’existence de solutions en champ fort ou dans le cas de trous noirs est également importante.
- Nous avons pu vérifier dans l’article [27] que la gravité tendait bien vers la RG à petites distances ; il conviendrait cependant d’être plus précis, et de contraindre les théories de k -Mouflage à l’aide du formalisme PPN et des tests dans le système solaire.
- l’étude de la cosmologie de ces théories est également une voie à explorer. En particulier, on peut se demander dans quelle mesure il est possible d’utiliser le champ ϕ pour jouer le rôle d’énergie noire.
- les aspects théoriques des modèles de k -Mouflage doivent également être approfondis, que ce soit du point de vue de l’existence d’éventuels fantômes ou de la possible propagation du champ ϕ à une vitesse plus rapide que la vitesse de la lumière. La question des possibles complétions ultra-violettes de ces théories devra également être abordée².

²Cela est d’ailleurs également vrai des théories de Galiléon, dont la complétion non-linéaire semble problématique [4, 203].

Quatrième partie

Contraintes expérimentales sur les théories de gravité modifiée

Chapitre 8

Confrontation avec l'expérience

Sommaire

8.1	Tests en laboratoire et dans le système solaire	204
8.1.1	Tests en laboratoire	204
8.1.2	Tests dans le système solaire et paramètres PPN	204
8.2	Galaxies et matière noire	206
8.3	Cosmologie	209
8.3.1	Évolution de la métrique de fond	209
8.3.2	Une introduction à la théorie des perturbations	209
8.3.3	Observables liées aux perturbations cosmologiques (galaxies, len- tilles...)	214
8.3.4	Corrélations des observables cosmologiques	219
8.3.5	Corrélations galaxies-galaxies, galaxies-amplification et méthodes géométriques	221
8.3.6	La Relativité Générale en défaut ?	222
8.4	Tester la gravité avec les ondes gravitationnelles	223
8.4.1	Ondes gravitationnelles et observations	223
8.4.2	Diagramme de Hubble gravitationnel et dimensions supplémentaires	224
8.4.3	Propagation des ondes gravitationnelles dans le modèle DGP . .	224
8.4.4	Signal d'une source périodique	227

La gravité est une force dont les effets se font sentir sur une immense plage de distances : de $10\mu\text{m}$, pour les tests les plus précis en laboratoire, jusqu'aux distances cosmologiques de l'ordre du rayon de Hubble $c/H_0 \simeq 10^{28}\text{cm}$. Les lois de la gravité peuvent donc être testées sur 31 ordres de grandeur !

Dans ce chapitre, nous souhaitons présenter les différentes contraintes expérimentales auxquelles doit satisfaire toute théorie de gravité pour être considérée comme acceptable physiquement. Bien entendu, la nature et la précision des tests de la gravité varient beaucoup selon les échelles considérées. Nous décrirons ainsi les tests à petites échelles, en laboratoire ou dans le système solaire, puis nous évoquerons brièvement les contraintes sur les mouvements des galaxies qui justifient l'hypothèse de la matière noire. Nous détaillerons

ensuite les contraintes de nature cosmologique, en insistant sur ce que les perturbations cosmologiques peuvent nous apprendre. Enfin, nous présenterons les contraintes sur les lois de la gravité qui peuvent (ou plutôt pourront) provenir de la détection des ondes gravitationnelles.

8.1 Tests en laboratoire et dans le système solaire

8.1.1 Tests en laboratoire

De nombreux tests des lois de la gravité sont menés en laboratoire [288], que ce soit pour tester le principe d'équivalence faible, l'invariance de Lorentz, l'invariance par changement de position, ou encore l'existence d'une "cinquième force". C'est ce dernier type de tests qui nous intéressera le plus ici, car il permet de vérifier que la force gravitationnelle est bien de la forme $\propto 1/r^2$ à petites distances, y compris sub-centimétriques.

Les tests de l'existence d'une cinquième force sont basés sur des expériences qui mesurent très précisément la force s'exerçant entre deux masses m_1 et m_2 (en utilisant des balances de torsions, ou des résonateurs mécaniques microscopiques). Cela permet de contraindre l'intensité et la portée que pourrait avoir toute nouvelle force qui s'exercerait entre les deux masses, en plus de la force gravitationnelle. L'effet de cette éventuelle interaction additionnelle est paramétrisé sous la forme d'une correction de Yukawa au potentiel newtonien, de telle sorte que le potentiel entre les deux masses prend la forme

$$V(R) = -G \frac{m_1 m_2}{R} \left(1 + \alpha e^{-R/\lambda} \right). \quad (8.1)$$

Plusieurs groupes ont mené des expériences permettant de contraindre les paramètres α et λ (voir [7] pour une revue des tests expérimentaux de la loi en $1/r^2$ de la force gravitationnelle à petites distances), parmi lesquels on peut citer le groupe "Eöt-Wash" [6, 150, 168] de l'université de Washington, le groupe de Stanford University [66, 134, 252], le groupe de l'université du Colorado à Boulder [184], et le groupe de l'université de Californie à Irvine [149, 257]. Les différentes contraintes obtenues par ces groupes sont indiquées sur la figure 8.1. Le groupe "Eöt-Wash" a ainsi pu montrer que toute correction dont l'intensité serait du même ordre que la force gravitationnelle ($|\alpha| = 1$) ne peut avoir une portée $\lambda \gtrsim 56\mu\text{m}$ [168]. C'est cette contrainte qui nous a permis de dire à la Section 2.1.2, consacrée aux modèles branaires, que la gravité était bien testée jusqu'au dixième de millimètre¹.

8.1.2 Tests dans le système solaire et paramètres PPN

Au sein du système solaire, il est possible de paramétriser l'écart entre les lois de la gravité et la Relativité Générale (RG) grâce au formalisme PPN², initié historiquement par Eddington, Robertson et Schiff puis développé par K. Nordtvedt [207] et C. Will [286]. Un exposé complet du formalisme PPN peut être trouvé dans le livre de C. Will [287].

¹Notons que le groupe de Stanford a pu obtenir des contraintes à des échelles encore plus petites (jusqu'à $\lambda = 10\mu\text{m}$), mais seulement pour des forces dont l'intensité α est beaucoup plus grande (i.e. $\alpha > 14000$). Ces contraintes ne s'appliquent donc pas pour des théories prédisant une modification d'ordre un de la gravité.

²PPN est l'abréviation anglaise pour *Parametrized Post-Newtonian*.

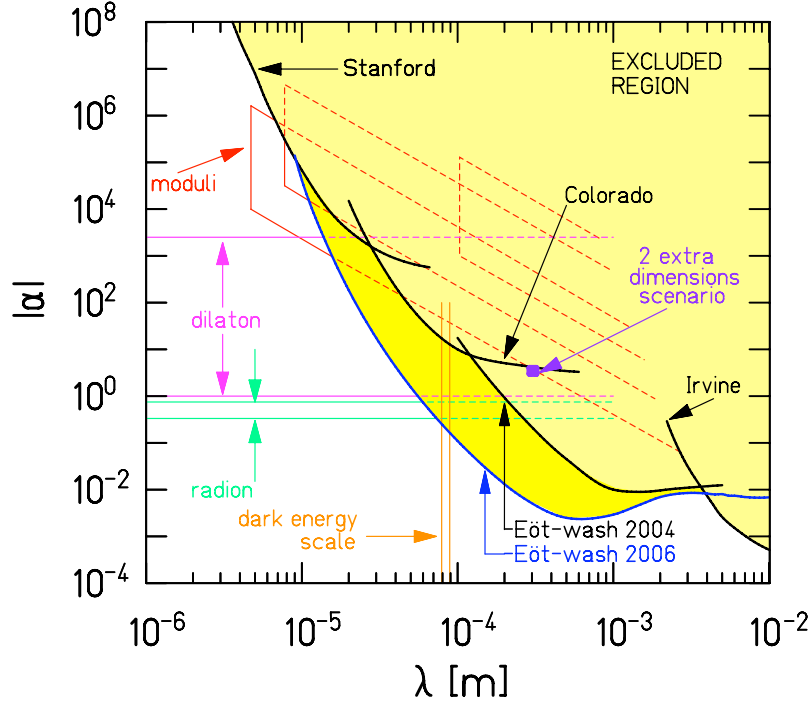


FIG. 8.1 – Contraintes sur les possibles violations de la loi newtonienne de la gravité à courtes distances. Les corrections au potentiel newtonien sont supposées être de la forme d'un potentiel de Yukawa, d'intensité α et de portée λ . La partie colorée est exclue avec un niveau de confiance de 95%. Les différentes courbes expérimentales proviennent des références [66, 149, 150, 168, 184, 252, 257]. La figure est issue de la référence [168].

L'idée du formalisme PPN consiste à ajouter à la métrique newtonienne,

$$ds^2 = - \left(1 - 2 \frac{GM}{R} \right) dt^2 + dR^2 + R^2 d\Omega^2, \quad (8.2)$$

qui existe autour d'un astre de masse M , des termes additionnels qui tiennent compte des corrections dues à la complétion non-linéaire de la théorie et à de possibles modifications des lois de la gravité. Plus précisément, on considère le paramètre $\epsilon \equiv GM/r$ que l'on suppose $\epsilon \ll 1$ (ce qui est très bien vérifié dans le système solaire), et on développe le tenseur énergie-impulsion et les coefficients de la métrique en puissances du paramètre ϵ (on garde les termes $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ dans g_{00} , d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon^{3/2})$ dans g_{0i} et d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$ dans g_{ij}). En écrivant tous les termes possibles qui sont cohérents avec ce développement en puissance de ϵ , on obtient 10 paramètres PPN. On peut alors montrer que dans le cas de théories qui proviennent d'une action et qui préservent les symétries par rotation et translation (théories *totalelement conservées* sans point de l'espace qui soit singularisé), seuls deux paramètres PPN sont nécessaires; dans le cas d'une source statique, la métrique PPN à symétrie

sphérique prend alors la forme [194]

$$ds^2 = - \left[1 - 2\frac{GM}{R} + 2\beta^{\text{ppn}} \left(\frac{GM}{R} \right)^2 \right] dt^2 + \left[1 + 2\gamma^{\text{ppn}} \frac{GM}{R} \right] (dR^2 + R^2 d\Omega^2), \quad (8.3)$$

la relativité générale correspondant à $\beta^{\text{ppn}} = \gamma^{\text{ppn}} = 1$.

L'avantage du formalisme PPN est qu'il permet de bien identifier les paramètres à contraindre, et ce sans faire d'hypothèses trop restrictives sur la forme de la "vraie" théorie de la gravité. Tout nouveau modèle de gravité peut donc être facilement confronté aux observations dans le système solaire : il suffit pour cela de calculer les paramètres PPN correspondants (comme on a pu le faire à la Section 6.1.2 dans le cas des théories scalaire-tenseur), et de les comparer à la valeur expérimentale de ces paramètres.

Pour mesurer expérimentalement ces derniers, de nombreuses observations sont disponibles [287]. Ainsi, la mesure de la variation du décalage temporel des signaux de la sonde Cassini (effet Shapiro) [44] et de la déflexion de la lumière par le Soleil (mesurée notamment grâce au *very-long-baseline radio interferometry (VLBI)* [182, 244]) permettent d'obtenir la contrainte

$$|\gamma^{\text{ppn}} - 1| < 2.3 \times 10^{-5}, \quad (8.4)$$

tandis que la mesure de l'avance du périhélie de Mercure mène à [288]

$$|2\gamma^{\text{ppn}} - \beta^{\text{ppn}} - 1| < 3 \times 10^{-3}. \quad (8.5)$$

Les paramètres PPN sont donc très bien mesurés, et permettent donc de contraindre fortement tout modèle de gravité, justifiant ainsi l'intérêt des mécanismes comme celui de Vainshtein ou du caméléon (*cf.* Chapitre 6) qui arrivent à bien reproduire la RG à courtes distances, tout en modifiant fortement la gravité à plus grandes distances.

8.2 Galaxies et matière noire

À présent, nous voudrions présenter les contraintes que l'on peut obtenir à des échelles de l'ordre des galaxies ou des amas de galaxies. Ces contraintes ne concernent pas vraiment les modèles d'énergie noire, et nous ne nous y attarderons donc pas très longtemps. Cependant, compte tenu de leur importance dans l'établissement de l'existence de la matière noire, nous ne pouvons totalement passer sous silence cet aspect.

L'observation la plus importante provient sans doute des courbes de rotation des galaxies, qui ne peuvent être expliquées dans le cadre de la gravité newtonienne sans matière additionnelle. En effet, les étoiles des galaxies spirales sont majoritairement concentrées au centre de la galaxie, à l'intérieur du disque optique (qui a un rayon de l'ordre de quelques kpc). S'il n'y avait pas de matière autre que lumineuse, la vitesse des étoiles à l'extérieur du disque optique serait donnée par

$$v(R) \simeq \sqrt{\frac{GM}{R}}, \quad (8.6)$$

où M est la masse de la matière visible de la galaxie. Cependant, au lieu d'une décroissance de la vitesse $v(R) \propto 1/\sqrt{R}$, les courbes de rotation des galaxies observées ont tendance

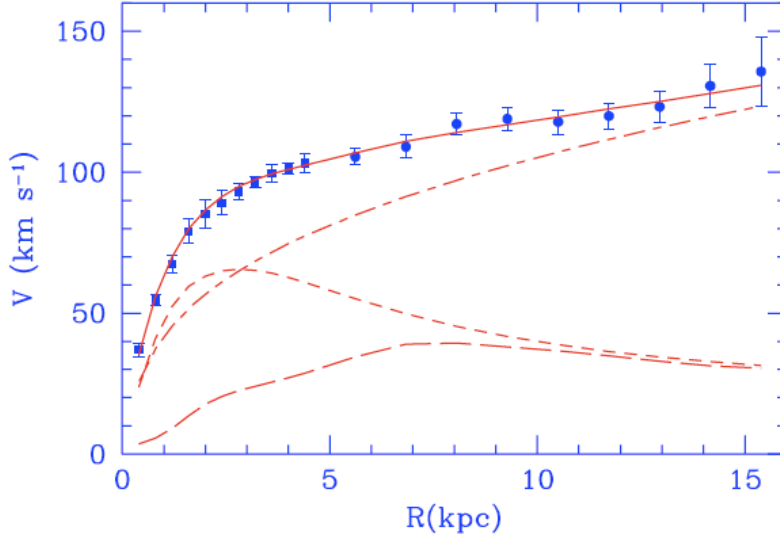


FIG. 8.2 – Courbe de rotation de la galaxie M33 ; les points avec barres d'erreur proviennent de la ligne à 21cm de l'hydrogène. La ligne en trait plein correspond à un modèle qui reproduit les observations. Les trois autres courbes correspondent aux différentes contributions à la courbe de rotation résultante : matière noire (tirets-pointillés), disque stellaire (tirets courts) et gaz (tirets longs). On voit que pour reproduire la courbe expérimentale (dans le cadre de la RG), il est nécessaire de postuler l'existence d'une composante de matière noire, qui domine à grandes distances. Figure issue de l'article [76].

à atteindre un régime $v(R) \simeq \text{constante}$ à grande distance du centre, en contradiction avec le régime newtonien. Une telle courbe de rotation est reproduite à la figure 8.2. Pour expliquer la courbe expérimentale, l'hypothèse la plus couramment admise est qu'il existe une composante de matière invisible, appelée *matière noire*, dont la densité décroît comme $\rho_m \propto R^{-2}$ au sein du halo des galaxies. Notons que l'existence de la matière noire a par ailleurs été confirmée par de nombreuses autres observations cosmologiques, parmi lesquelles on peut citer l'expansion de l'Univers, la croissance des structures, le CMB et les effets de lentilles gravitationnelles [105, 215] ; ces mesures sont cohérentes, et mènent toutes à $\Omega_m \simeq 0.3$.

De la même façon que des modèles de modification de la gravité ont été proposés pour rendre compte de l'accélération de l'Univers sans énergie noire, des théories de gravité modifiée ont été avancées afin de rendre compte des courbes de rotation des galaxies (ainsi que de la loi de Tully-Fisher qui correspond au fait que la luminosité des galaxies est $\propto v_\infty^4$, où v_∞ est la vitesse au bord de la galaxie). La plus connue de ces théories qui modifient la gravité pour se passer de matière noire est la théorie MOND (pour MODified Newtonian Dynamics) de Milgrom [193], dont une formulation dans le cadre de la théorie des champs a été proposée par Bekeinstein [38], sous la forme de la théorie TeVeS (voir également [54, 55]). Cependant, ce modèle, dans sa version la plus simple tout au moins,

n'est pas à même de satisfaire aux contraintes expérimentales liées aux courbes de rotation des galaxies et aux effets de lentilles gravitationnelles [120].

La théorie MOND a également été mise en difficulté par la spectaculaire observation rapportée par Clowe *et al.* dans l'article [73] de la collision de deux amas de galaxies, dans laquelle un petit amas (appelé “*bullet cluster*”) traverse un plus grand amas. Comme on peut le voir sur la figure 8.3, la reconstruction de la convergence κ créée par les amas (représentée par des contours fermés; ces contours sont obtenus en étudiant les effets de lentille des amas sur les galaxies de l'arrière-plan) met en évidence deux régions qui ne correspondent pas à la localisation du gaz. Dans le cadre de la RG, on peut interpréter

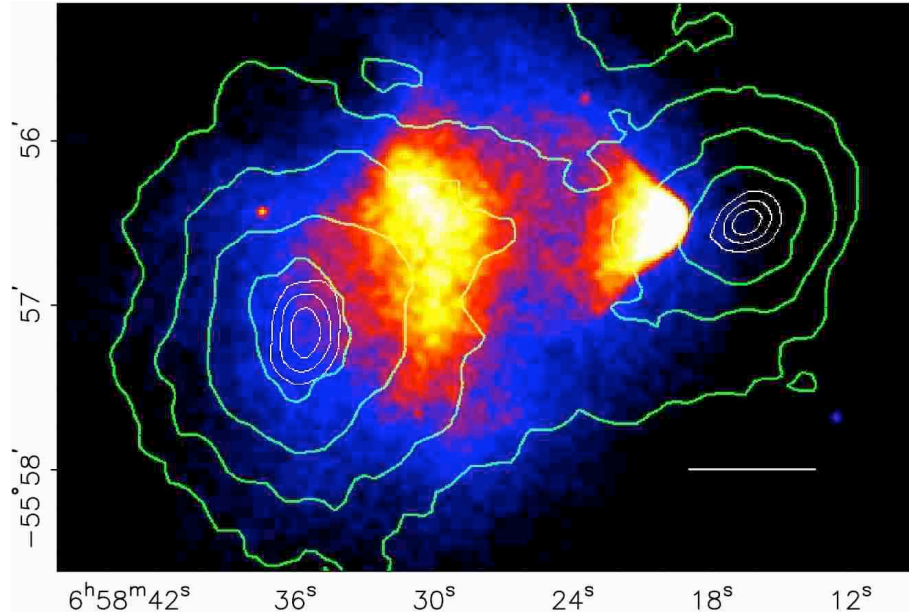


FIG. 8.3 – Image de la collision des amas 1E0657-558. Les contours fermés verts correspondent à la reconstruction du signal de lentille gravitationnelle (convergence κ , qui sera définie à l'équation (8.39)) des galaxies d'arrière-plan. Les formes colorées correspondent au gaz. Figure issue de l'article [73].

cette image en considérant que lors de la collision, l'essentiel de la masse du petit amas a traversé l'autre amas sans être perturbé (ce qui est cohérent avec l'idée que l'essentiel de la masse des amas est sous la forme de matière noire, qui n'interagit pas), tandis que les gaz des deux amas se rencontraient et interagissaient. Les centres de masses (qui correspondent en RG aux régions responsables de l'effet de lentille gravitationnelle) et le gaz sont alors explicitement séparés. Cette séparation entre les régions responsables de la convergence κ et la localisation du gaz semble difficile à expliquer par une théorie de gravité modifiée. En effet, *a priori*, il n'est pas évident que la matière baryonique puisse créer un effet de lentille à un endroit différent de celui où elle se situe (voir cependant les références [14, 15] qui proposent une interprétation du *bullet cluster* dans le cadre de MOND, à condition de supposer l'existence de matière noire sous la forme de neutrinos).

8.3 Cosmologie

Les observations cosmologiques permettent de contraindre les modèles de gravité modifiée, tant au niveau de l'évolution la métrique de fond de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) que des perturbations cosmologiques.

8.3.1 Évolution de la métrique de fond

Nous avons vu à la Section 1.1 que, sous les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie, la métrique de notre Univers est donnée par la métrique de FLRW (*cf.* équation (1.1)). Nous avons ensuite décrit, à la Section 1.2, comment modéliser l'énergie noire à l'aide du paramètre $\Omega_{de,0}$ et de la fonction $w_{de}(a)$. Les données des SN Ia, du CMB et des BAOs permettent en principe de mesurer la fonction $H(a)$, ce qui donne accès à $\Omega_{de}(a) = \Omega_{de,0} a^{-3(w_{de}+1)}$ grâce à l'équation (1.21).

Dans le cas d'un modèle d'énergie noire dépendant d'un nombre fini de paramètres libres, comme c'est par exemple le cas des modèles Λ CDM ou DGP, il est possible de tester la validité du modèle à partir des observations liées à la métrique de fond. En revanche, quand le modèle dépend de fonctions libres, comme dans le cas des modèles scalaire-tenseur (*cf.* Section 6.1), la connaissance de la fonction $H(a)$ ne permet au mieux que de reconstruire l'une de ces fonctions libres. Pour tester plus avant le modèle, il est alors nécessaire d'utiliser les observations liées aux perturbations cosmologiques.

8.3.2 Une introduction à la théorie des perturbations

La théorie des perturbations cosmologiques est un vaste champ d'étude, et nous nous contenterons ici d'introduire un certain nombre de concepts et de quantités qui nous seront utiles par la suite pour contraindre les théories de la gravité à partir des observables cosmologiques. Dans toute notre étude des perturbations, nous supposerons que toutes les grandeurs liées à la métrique de fond sont connues. Nous nous concentrerons donc sur les perturbations qui existent autour de ces grandeurs de fond.

Choix de jauge et métrique perturbée

Nous allons nous concentrer sur les perturbations linéaires, et plus précisément sur le secteur scalaire des perturbations³. Nous travaillerons en jauge longitudinale⁴; la métrique perturbée prend alors la forme

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + a^2(1 - 2\psi)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (8.7)$$

où δ_{ij} est la métrique Euclidienne, et ϕ et ψ sont les deux potentiels gravitationnels. Nous pouvons maintenant nous tourner vers les équations de perturbations.

³À l'ordre linéaire, les perturbations scalaires, vectorielles et tensorielles ne sont pas couplées; on peut donc les étudier séparément. Les perturbations scalaires sont les perturbations les plus pertinentes pour les tests de la gravité, et nous porterons donc notre attention sur ces dernières.

⁴Nous préférons ici pour des raisons de simplicité travailler dans une jauge particulière. Pour une présentation du formalisme invariant de jauge des perturbations, on pourra se référer à [33, 173, 198, 215].

Perturbations en RG

Il est instructif dans un premier temps de rappeler la forme des équations des perturbations cosmologiques dans le cas le plus simple, qui constitue en quelque sorte le “scénario de référence” : le modèle Λ CDM. Nous nous concentrerons sur les perturbations après le moment de l'égalité matière-radiation. En effet, les observations du CMB contraignent toute théorie de gravité modifiée réaliste à être très proche de la RG avant la recombinaison : les observations les plus riches concernant les modifications de la gravité seront donc liées à la croissance des perturbations durant l'ère de matière et l'ère dominée par l'énergie noire.

Le tenseur énergie-impulsion perturbé de la matière noire s'écrit

$$\delta T_0^0 = -\bar{\rho}_m \delta_m, \quad (8.8)$$

$$\delta T_i^0 = -\delta T_0^i = \bar{\rho}_m \partial_i V_m, \quad (8.9)$$

$$\delta T_j^i = 0, \quad (8.10)$$

où $\bar{\rho}_m$ est la densité moyenne de matière noire, δ_m est la surdensité relative de matière noire $\delta_m \equiv (\rho_m - \bar{\rho}_m)/\bar{\rho}_m$ et V_m la partie scalaire de la vitesse de la matière noire. Le tenseur énergie-impulsion perturbé de l'énergie noire, qui est supposée être une simple constante cosmologique, est quant à lui nul. Les équations de conservation de la matière dans l'espace de Fourier et dans la limite “newtonienne” (c'est-à-dire pour des modes à l'intérieur du rayon de Hubble) s'écrivent alors

$$\dot{\delta}_m = -\frac{\theta_m}{a}, \quad (8.11)$$

$$\dot{\theta}_m + H\theta_m = \frac{k^2}{a}\phi, \quad (8.12)$$

où l'on a introduit $\theta_m \equiv k^2 V_m$. Les équations d'Einstein prennent la forme

$$\phi - \psi = 0, \quad (8.13)$$

$$-k^2\psi = 4\pi G\bar{\rho}_m a^2 \delta_m. \quad (8.14)$$

L'équation (8.13) montre que la matière noire ne crée pas de pression anisotrope ; l'équation (8.14) correspond à l'équation de Poisson.

En combinant ces équations, on peut obtenir une équation d'évolution de la perturbation de la densité de matière noire

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G\bar{\rho}_m \delta_m = 0. \quad (8.15)$$

Cette équation admet un mode croissant et un mode décroissant. Si l'on ne garde que le mode croissant et que l'on pose $\delta_m = D(a)\delta_{m,i}$ où $\delta_{m,i}$ correspond à la densité initiale au temps t_i , l'équation (8.15) s'écrit

$$\ddot{D} + 2H\dot{D} - 4\pi G\bar{\rho}_m D = 0, \quad (8.16)$$

qui peut être facilement intégrée. On définit souvent le taux d'expansion

$$f \equiv \frac{d \ln D}{d \ln a} , \quad (8.17)$$

qui permet, à partir de l'équation (8.11) de relier δ_m et θ_m par

$$\theta_m = aHf\delta_m. \quad (8.18)$$

Les observables cosmologiques que nous détaillerons à la Section 8.3.3 (densité de galaxies, effet de lentilles gravitationnelles, distorsion dans l'espace des redshifts, effet ISW), permettent de tester expérimentalement les prédictions de l'équation (8.15) pour la croissance des perturbations.

Perturbations en gravité modifiée

Nous pouvons maintenant généraliser les équations de perturbations aux cas où la nature de l'énergie noire est plus complexe qu'une simple constante cosmologique, ou aux modèles de gravité modifiée. De nombreuses paramétrisations ont été proposées [11, 12, 36, 45, 58, 153, 156, 162, 253, 268, 279, 296]. Nous suivons ici la présentation des articles de J.P. Uzan [265, 267].

En premier lieu, les équations de conservation de la matière noire peuvent être modifiées, si l'énergie noire et la matière noire interagissent. Dans ce cas, une force autre que gravitationnelle s'exerce, menant aux équations

$$\dot{\delta}_m = -\frac{\theta_m}{a} , \quad (8.19)$$

$$\dot{\theta}_m + H\theta_m = \frac{k^2}{a}\phi + \mathcal{S}_{de} , \quad (8.20)$$

\mathcal{S}_{de} décrivant la force qui s'exerce entre l'énergie noire et la matière noire. Les équations d'Einstein perturbées peuvent être généralisées de deux façons par rapport aux équations (8.13) et (8.14) du cas Λ CDM : d'une part, l'énergie noire peut avoir un tenseur énergie-impulsion non-nul (c'est le cas par exemple si l'énergie noire peut s'effondrer sous l'action du potentiel gravitationnel), et d'autre part les lois de la gravité peuvent être modifiées. Ainsi, l'équation (8.13) peut posséder un terme de pression anisotrope provenant de la partie spatiale du tenseur énergie-impulsion de l'énergie noire

$$-k^2(\phi - \psi) = \Pi_{de}. \quad (8.21)$$

L'équation de Poisson peut quant à elle prendre la forme générale

$$-k^2\psi = 4\pi G_{\text{cav},0} \bar{\rho}_m F_m(k, a) a^2 \delta_m + \Delta_{de}, \quad (8.22)$$

où Δ_{de} décrit la perturbation de densité d'énergie noire et F_m est une fonction qui prend en compte les possibles modifications de la gravité. Notons que la constante gravitationnelle utilisée dans (8.22) correspond à la constante gravitationnelle mesurée aujourd'hui dans une expérience de Cavendish.

L'équation de croissance des perturbations prend alors la forme

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G_{\text{cav},0} \bar{\rho}_m F_m(k, a) \delta_m = \frac{\Delta_{de}}{a^2} + \mathcal{S}_{de}. \quad (8.23)$$

Bien sûr, le système d'équation ainsi écrit n'est pas complet : il faut y ajouter les équations du mouvement pour les degrés de liberté supplémentaires introduits par l'énergie noire. Tant que ces équations ne sont pas connues, peu de conclusions peuvent être tirées ; remarquons cependant que la paramétrisation générale que nous avons écrite permet de classer les différentes théories, selon le comportement des différentes fonctions $(\mathcal{S}_{de}, \Delta_{de}, F_m, \Pi_{de})$. Ainsi, le modèle Λ CDM correspond à $(\mathcal{S}_{de}, \Delta_{de}, F_m, \Pi_{de}) = (0, 0, 1, 0)$, tandis que d'autres modèles auront une paramétrisation plus complexe. Afin d'illustrer cette paramétrisation dans le cas d'une théorie de gravité modifiée, nous présentons dans le prochain paragraphe la forme des perturbations cosmologiques dans le cas des théories scalaire-tenseur (ST) que nous avons définies à la Section 6.1.

Exemple des théories scalaire-tenseur

Les équations des perturbations cosmologiques linéaires dans le cas des théories scalaire-tenseur ont été obtenues dans [117, 230]. Pour des modes sub-horizon (c'est-à-dire lorsque l'on suppose que pour toute quantité f qui évolue à un rythme cosmologique, on a $|(k/a)f| \gg |\dot{f}| \sim H|f|$), elles s'écrivent dans le cas $Z = 1$

$$\dot{\delta}_m = -\frac{\theta_m}{a}, \quad (8.24)$$

$$\dot{\theta}_m + H\theta_m = \frac{k^2}{a}\phi \quad (8.25)$$

$$\psi - \phi = \frac{F_{,\varphi}}{F}\delta\varphi \quad (8.26)$$

$$-2F\frac{k^2}{a^2}\phi = 8\pi G\rho\delta + \frac{k^2}{a^2}\delta F. \quad (8.27)$$

À partir de ces équations et en utilisant l'expression (6.19) pour la constante gravitationnelle de Cavendish, on peut montrer [265] que pour les théories ST dans le régime sub-Hubble

$$(\mathcal{S}_{de}, \Delta_{de}, F_m, \Pi_{de}) = \left(0, \frac{F_{,\varphi}}{2F}k^2\delta\varphi, \frac{F_0}{F} \left[1 + \frac{F_{,\varphi}^2}{2F + 3F_{,\varphi}^2} \right]^{-1}, \frac{F_{,\varphi}}{F}k^2\delta\varphi \right). \quad (8.28)$$

On voit donc que les perturbations du champ φ créent une pression anisotrope, de la même façon que pourrait le faire de la radiation (ou des neutrinos). On voit également que la fonction F_m peut *a priori* dépendre du mode k . Étant donné que l'on connaît le modèle d'énergie noire en détail, on peut aller plus loin et clore le système en écrivant l'équation de Klein-Gordon qui prend la forme

$$\left(\frac{k^2}{a^2} + U_{,\varphi\varphi} \right) \delta\varphi = \frac{k^2}{a^2} (\phi - 2\psi) F_{,\varphi}. \quad (8.29)$$

En combinant les équations, on peut montrer que les perturbations $\delta\varphi$ et δ_m sont reliées, ce qui permet d'obtenir après remplacement

$$-k^2\phi = 4\pi\frac{G}{F} \left[1 - \frac{k^2 F_{,\varphi}^2}{(2ZF + 4F_{,\varphi}^2)k^2 + 2U_{,\varphi\varphi}F} \right]^{-1} \bar{\rho}_m a^2 \delta_m. \quad (8.30)$$

Remarquons qu'il existe une certaine dégénérescence entre Δ_{de} et F_m , puisque la fonction F_m peut suffire à décrire toutes les modifications apportées à l'équation de Poisson (8.30) par la présence du champ φ . Ceci est dû au fait que dans ce cas particulier, tous les champs sont proportionnels aux perturbations de matière⁵. Notons également que dans l'espace réel, la correction au potentiel newtonien est de la forme de Yukawa : on retrouve ici le fait qu'un scalaire très massif n'influence pas les lois de la gravité, tandis qu'un scalaire léger les modifie.

À partir de cette analyse des perturbations, il est possible de prédire les observables cosmologiques en fonction des paramètres du modèle ST, et de les confronter aux observations (voir par exemple [119, 230, 265]).

Paramétrisation dans le cas de conditions initiales adiabatiques

La paramétrisation $(\mathcal{S}_{de}, \Delta_{de}, F_m, \Pi_{de})$, est intéressante pour son caractère général. Mais cet avantage est également un défaut : il est difficile de contraindre autant de fonctions libres avec les observables cosmologiques. C'est pourquoi les paramétrisations proposées dans la littérature sont généralement plus restrictives.

Il est ainsi souvent supposé que la matière noire est conservée (l'énergie noire n'étant alors pas couplée à la matière noire), et donc que $\mathcal{S}_{de} = 0$. Et concernant les équations d'Einstein, une paramétrisation fréquente [11, 12, 36, 45, 58, 153, 162, 253, 268] consiste à mesurer la présence d'une pression anisotrope par l'équivalent du paramètre γ^{ppn} :

$$\eta(k, a) \equiv \frac{\psi}{\phi}, \quad (8.31)$$

tandis que l'équation de Poisson est quant à elle supposée être de la forme [268]

$$-k^2\psi = 4\pi G_{\text{cav},0} \bar{\rho}_m Q(k, a) a^2 \delta_m, \quad (8.32)$$

ce qui revient à supposer que la constante de Newton devient dépendante du temps et de l'espace. Notons que cette dernière équation n'est pas exactement équivalente à l'hypothèse $\Delta_{de} = 0$, mais plutôt à $\Delta_{de} \propto \delta_m$, comme on a pu le voir à l'équation (8.30) sur l'exemple des théories ST. Dans ce cas, l'équation de croissance des structures s'écrit

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G_{\text{cav},0} \bar{\rho}_m \frac{Q(k, a)}{\eta(k, a)} \delta_m = 0. \quad (8.33)$$

De la même façon que dans le cas ΛCDM , on peut poser $\delta_m = D(a) \delta_{m,i}$ où $\delta_{m,i}$ correspond à la densité initiale au temps t_i . On définit également le taux d'expansion $f \equiv \frac{d \ln D}{d \ln a}$ qui relie δ_m et θ_m par

$$\theta_m = aHf\delta_m. \quad (8.34)$$

La paramétrisation ci-dessus, très fréquente dans la littérature, n'est pas toujours solidement argumentée. Nous voudrions noter ici qu'une telle paramétrisation trouve une justification naturelle dans le cas où l'on fait l'hypothèse que les conditions initiales des perturbations à l'issue de l'inflation sont adiabatiques. En effet, il n'y a alors qu'un seul

⁵En particulier, cela veut dire qu'il suffit d'un seul champ stochastique pour décrire le spectre de puissance de toutes les observables cosmologiques, ou encore que toutes les observables peuvent être exprimées en fonction du spectre de puissance de la matière noire.

champ stochastique, que l'on peut choisir comme étant la perturbation de matière noire δ_m ; tous les autres champs sont alors nécessairement de la forme $\alpha(k, a)\delta_m$ où α est une fonction qui dépend du champ mais qui est entièrement fixée par l'évolution de la métrique de fond. Il est alors clair que les paramétrisations des équations (8.31) et (8.32) couvrent tous les cas possibles.

Tournons-nous à présent sur les observables que l'on peut utiliser pour contraindre les modèles d'énergie noire.

8.3.3 Observables liées aux perturbations cosmologiques (galaxies, lentilles...)

Quelles observables liées aux perturbations cosmologiques peuvent être utilisées pour contraindre la gravité? Nous l'avons déjà dit, le CMB et la nucléosynthèse primordiale contraignent les modèles d'énergie noire ou de gravité modifiée à être très proches de la RG durant l'ère de radiation et le début de l'ère de matière. Les observables qui vont nous intéresser sont donc toutes liées à ce qui s'est passé ensuite, à savoir la formation des grandes structures. Nous détaillerons ici quatre observables : la densité de galaxies, les vitesses des galaxies, l'effet de lentilles gravitationnelles et l'effet ISW.

Densité de galaxies

Historiquement, la mesure du nombre de galaxies par unité d'angle solide dans le ciel est l'observable qui a été la plus utilisée. La quantité à 3 dimensions correspondante est la perturbation de densité de galaxies $\delta_g = (\rho_g - \bar{\rho}_g)/\bar{\rho}_g$ où ρ_g est la densité volumique de galaxies, et $\bar{\rho}_g$ est la densité moyenne de galaxies.

En pratique, nous n'avons pas accès à une mesure en trois dimensions de cette densité, mais seulement à une projection sur la sphère céleste à deux dimensions. Bien sûr, la mesure spectrométrique du redshift des galaxies donne une excellente indication de la troisième coordonnée spatiale z . Néanmoins, il n'est pas toujours possible d'effectuer des mesures spectrométriques : en pratique, par manque de temps et pour pouvoir traiter un grand nombre de galaxies, le redshift est souvent mesuré par photométrie. Pour tenir compte de l'imprécision des mesures associée à la photométrie (et même à la spectrométrie), on définit pour un ensemble de galaxies situées autour d'un redshift z_0 la densité de galaxies projetée

$$\delta_g(\boldsymbol{\theta}) = \int_0^\infty dz W(z, z_0) \delta_g(\boldsymbol{\theta}, z), \quad (8.35)$$

où la fonction fenêtre $W(z, z_0)$ caractérise la distribution spectrale des sources. La fonction de distribution W est telle que $\int_0^\infty W(z, z_0) dz = 1$; on pourra par exemple prendre une fonction de distribution gaussienne, d'écart-type σ :

$$W(z, z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(z - z_0)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (8.36)$$

La densité de galaxies est supposée être un bon "traceur" de la densité de matière noire sous-jacente δ_m . Dans le régime linéaire, on peut introduire le *biais* linéaire qui relie les deux densités au travers de

$$\delta_g = b \delta_m. \quad (8.37)$$

Le biais est en général une quantité difficile à estimer [43], qui peut notamment dépendre du redshift et de l'échelle considérée. À grandes échelles, on peut faire l'hypothèse que le biais est indépendant de l'échelle, et ne dépend que de z .

Mesure de la vitesse des galaxies et distorsion dans l'espace des redshifts

Une autre grandeur intéressante à mesurer est le champ de vitesse des galaxies θ_g . En RG ou dans le cas des conditions initiales adiabatiques, le champ de vitesse des galaxies suit celui de la matière noire : $\theta_g = aHf\delta_m$.

Les vitesses des galaxies (et donc de la matière noire) peuvent être estimées à l'aide de la *distorsion dans l'espace des redshifts*. Cet effet résulte de la modification apportée à la mesure du redshift, par le champ de vitesse. Cette modification entraîne une distorsion entre la densité des galaxies dans l'espace réel et la densité dans l'espace des redshifts (qui est la grandeur mesurée). La dépendance angulaire de cet effet permet d'avoir accès au champ de vitesse, ou plus précisément aux corrélations galaxies-vitesse et vitesse-vitesse [105, 239].

Effet de lentille gravitationnelle faible

L'effet de lentille gravitationnelle est dû au fait que la trajectoire de la lumière (qui suit des géodésiques nulles) est "déviée" par la déformation de l'espace temps induite par la présence de masse [34, 105, 215]. Cela implique notamment que la forme des objets observés peut être modifiée (*cf.* figure 8.4). Ainsi une galaxie elliptique pourra être observée avec une

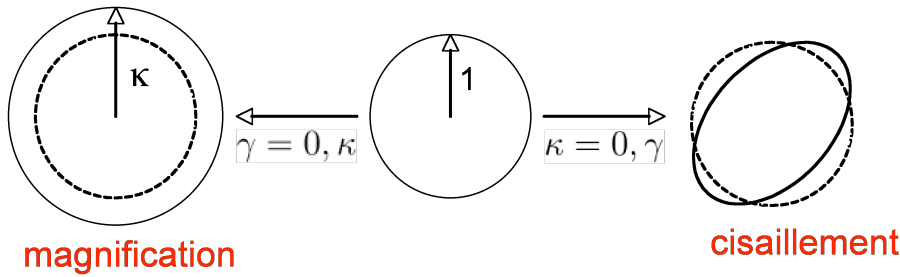


FIG. 8.4 – Déformation de l'apparence d'un objet sphérique sous l'action de l'amplification (magnification : augmentation de la surface apparente) et du cisaillement (modification de la forme).

surface et une ellipticité différentes de leurs valeurs intrinsèques. Lorsque les fluctuations de la masse, située entre la source et l'observateur, sont petites, l'effet de lentille correspond à une déformation très légère ; l'effet est alors dit *faible*. C'est une hypothèse très bien justifiée lorsque la masse responsable de l'effet de lentille est la distribution de matière noire⁶.

⁶Nous verrons en effet plus loin que l'effet de lentille gravitationnelle est directement lié aux potentiels gravitationnels qui sont très petits, même dans le régime non-linéaire des perturbations. Ce n'est qu'au voisinage de corps très massifs que les potentiels gravitationnels deviennent importants et que l'approximation de lentille faible n'est plus vérifiée. On peut alors observer de spectaculaires arcs ou encore de multiples images de la même source.

Considérons un ensemble de sources (galaxies ou quasars) distribuées autour du redshift z_0 et caractérisées par la distribution spectrale $W(z, z_0)$. La déformation de l'apparence de ces sources, due aux effets de lentilles faibles, peut être mesurée par le rapport entre l'angle θ_S d'un point appartenant aux sources (en tant qu'objet émetteur de lumière) et l'angle θ sous lequel est vu ce même point (en tant qu'image); ce rapport est ce qu'on appelle la *matrice de déformation*

$$\mathcal{A}(\theta) = \frac{\partial \theta_S}{\partial \theta} . \quad (8.38)$$

On peut montrer que la matrice de déformation $\mathcal{A}(\theta)$ est de la forme

$$\mathcal{A}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} . \quad (8.39)$$

La fonction κ est appelée *convergence* tandis que les fonctions $\gamma \equiv (\gamma_1, \gamma_2)$ correspondent au *cisaillement*⁷. L'expression explicite de la matrice \mathcal{A} , et donc des fonctions $\kappa, \gamma_1, \gamma_2$, est donnée par

$$\mathcal{A}_{ij}(\theta) = \delta_{ij} + \int_0^\infty dz \frac{c}{H(z)} g(z, z_0) \Phi_{,ij} [\chi(z)\theta, z], \quad (8.40)$$

où l'on a défini la combinaison des potentiels gravitationnels

$$\Phi = \phi + \psi. \quad (8.41)$$

La notation $\Phi_{,ij} \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ correspond aux dérivées secondes de la fonction Φ sur la sphère à deux dimensions du ciel. La fonction $\chi(z)$ est la distance parcourue radialement par les photons entre un point situé à un redshift z et l'observateur, et est donnée par l'expression

$$\chi(z) = \int_0^z dz' \frac{c}{H(z')} = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\sum_i \Omega_{i,0} (1+z')^{3(1+w_i)}}} . \quad (8.42)$$

Enfin, la fonction

$$g(z, z_0) = \chi(z) \int_z^\infty dz' \frac{\chi(z') - \chi(z)}{\chi(z')} W(z', z_0) \quad (8.43)$$

peut être vue comme un coefficient géométrique qui pondère la contribution de la masse située autour du redshift z , à la déformation des galaxies situées en z_0 .

L'expression (8.39) montre que l'effet de lentille gravitationnelle est sensible à la combinaison spécifique $\Phi = \phi + \psi$. On a vu aux équations (8.13) et (8.21) que $\phi = \psi$ dans le modèle Λ CDM mais pouvaient différer en présence d'une pression anisotrope créée par l'énergie noire ou des modifications de la gravité. L'effet de lentille est donc un outil particulièrement intéressant pour tester, en combinaison avec d'autres observables, la présence de pression anisotrope.

La convergence κ et le cisaillement γ sont directement reliés à la déformation que subit l'apparence des sources sous l'effet de lentilles gravitationnelles, comme on peut le voir

⁷ *Shear* en anglais.

d'une façon schématique sur la figure 8.4. La mesure de cette déformation donne donc accès aux quantités cosmologiques κ et γ .

La quantité la plus souvent mesurée dans les observations de lentilles gravitationnelles est l'*ellipticité* des galaxies. En effet, comme on l'a déjà mentionné, l'ellipticité des galaxies est modifiée par le cisaillement. Bien entendu, l'ellipticité intrinsèque de chaque galaxie n'est pas connue *a priori* ; il n'est donc pas possible de mesurer la contribution du cisaillement pour une galaxie particulière, d'autant plus que l'ellipticité intrinsèque des galaxies est généralement bien plus grande que la déformation due au cisaillement. Cependant, si l'on suppose que les ellipticités intrinsèques des galaxies ne sont pas corrélées les unes avec les autres, on peut s'affranchir de cette difficulté en moyennant sur un grand nombre de galaxies (la composante intrinsèque se moyennant alors à zéro). Il est également possible de corréliser les ellipticités d'un grand nombre de paires de galaxies ; l'ellipticité de chaque galaxie n'étant corrélée ni avec l'ellipticité intrinsèque des autres galaxies ni avec le cisaillement, sa contribution est nulle, et seules les corrélations entre les composantes des ellipticités provenant du cisaillement demeurent. Cela permet ainsi d'avoir accès aux potentiels gravitationnels.

La matrice \mathcal{A}_{ij} ne dépendant *in fine* que d'une seule quantité scalaire Φ , toutes les observables liées aux lentilles peuvent d'une façon ou d'une autre se ramener à une seule quantité scalaire, que l'on peut choisir comme étant la convergence

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dz \frac{c}{H(z)} g(z, z_0) \nabla_\perp^2 \Phi [\chi(z)\theta, z]. \quad (8.44)$$

En particulier, on peut exprimer les observations obtenues à partir du cisaillement en fonction de la convergence. Dans la suite de ce mémoire, nous identifierons donc la mesure du cisaillement à celle de la convergence, et nous la noterons⁸ κ .

Il existe un autre effet mesurable induit par les lentilles gravitationnelles faibles : le biais d'amplification. Le biais d'amplification résulte de l'effet de lentille gravitationnelle, qui modifie non seulement la forme des sources, mais également leur taille (se référer à la définition (8.38) de la matrice de déformation \mathcal{A}) ; le rapport entre l'angle solide sous lequel est vue la source après déviation par la masse et l'angle solide sous lequel elle serait vue sans effet de lentille est appelé *amplification*⁹ et est donné par

$$\mu \equiv \frac{d\Omega}{d\Omega_S} = \det \left[\frac{\partial \theta_S}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{\det \mathcal{A}} = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)} \simeq 1 + 2\kappa. \quad (8.45)$$

Considérons un catalogue de galaxies dont la lumière traverse une région contenant de la matière noire pour arriver jusqu'à nous. Du fait de cette masse, les sources sont amplifiées, générant deux effets contradictoires ; ces effets sont illustrés sur la figure 8.5. D'un côté, l'amplification crée un effet de "zoom" sur la région observée : les distances entre galaxies sont agrandies par l'effet de lentille, ce qui fait que le nombre observé de galaxies par unité d'angle solide est plus petit que s'il n'y avait pas de lentille gravitationnelle. D'un autre côté, grâce à cette amplification, des galaxies qui seraient en-dessous du seuil de détectabilité

⁸Dans la littérature, on trouve également très souvent la notation γ pour désigner la même quantité.

⁹*Magnification* en anglais.

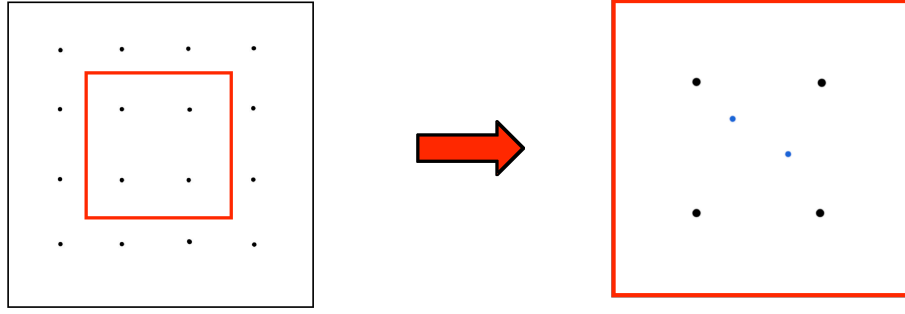


FIG. 8.5 – Effet sur la densité apparente de galaxies de l’amplification provenant de l’effet de lentille gravitationnelle. La figure de gauche représente un morceau du ciel sans effet de lentille ; la figure de droite représente le carré rouge de la figure de gauche, qui une fois amplifié par l’effet de lentille, occupe une surface plus grande qu’initialement. D’une part, l’amplification crée un effet de “zoom”, agrandissant les distances entre galaxies et diminuant par là-même la densité apparente de galaxies. D’autre part, certaines galaxies qui n’étaient pas apparentes avant l’amplification sont maintenant observables. L’effet net de ces deux contributions est appelé *biais d’amplification*.

deviennent visibles, augmentant ainsi la densité de galaxies. Ces deux effets se combinent en un terme de biais d’amplification δ_μ qui vient corriger la densité intrinsèque de galaxies par angle solide δ_g , de telle sorte que la densité de galaxies observées s’écrit

$$\delta_n = \delta_g + \delta_\mu. \quad (8.46)$$

L’expression de δ_μ dépend du nombre de galaxies dont la luminosité était juste en-dessous du seuil de détection et qui deviennent visibles grâce au biais d’amplification. Ce nombre est proportionnel à la pente de la fonction ρ_g qui donne le nombre de galaxies par unité de magnitude au seuil de détectabilité m :

$$s = \frac{d \log_{10} \rho_g(< m)}{dm}. \quad (8.47)$$

On peut montrer (voir par exemple la démonstration donnée dans l’Annexe A de l’article [154]) que pour des sources de distribution spectrale $W(z, z_0)$

$$\delta_\mu(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dz \frac{c}{H(z)} (5s(z) - 2) g(z, z_0) \nabla_\perp^2 \Phi [\chi(z) \boldsymbol{\theta}, z]. \quad (8.48)$$

Dans le cas où les galaxies sont regroupées autour du redshift z_0 et que la fonction $s(z)$ est à peu près la même pour toutes galaxies, on peut simplifier l’expression ci-dessus

$$\delta_\mu(\boldsymbol{\theta}) = (5s(z_0) - 2) \kappa(\boldsymbol{\theta}). \quad (8.49)$$

De la même façon que pour le cisaillement, il n’est pas possible d’avoir accès directement au biais d’amplification, car la perturbation de densité intrinsèque de galaxies ne nous est pas connue. Cependant, nous verrons à la section 8.3.4 ainsi qu’au Chapitre 9 qu’en corrélant la densité de galaxies situées à grand redshift (arrière-plan) avec la densité de galaxies situées devant (avant-plan), il est possible de mesurer cet effet.

Effet ISW

L'effet Sachs-Wolfe intégré¹⁰ (ISW) permet de prendre en compte le fait que les photons du CMB ont traversé sur leur chemin depuis la surface de dernière diffusion jusqu'à nous des puits de potentiel en évolution. La variation observée de température dans la direction $\boldsymbol{\theta}$ est donnée par [105, 215]

$$\Theta_{ISW} = \frac{\Delta T(\boldsymbol{\theta})}{T} = \int_0^{z_{LSS}} dz \frac{d}{dz} \left[\dot{\phi}(\boldsymbol{\theta}, z) + \dot{\psi}(\boldsymbol{\theta}, z) \right]. \quad (8.50)$$

8.3.4 Corrélations des observables cosmologiques

Formalisme général

Nous avons décrit un ensemble d'observables $A = \{\delta_n, \theta_g, \kappa, \Theta_{ISW}\}$ liées aux perturbations cosmologiques. Nous allons maintenant expliquer comment les corréler entre elles, et indiquer comment il est possible de contraindre les lois de la gravité à partir de ces corrélations.

Les observables $A = \{\delta_n, \theta_g, \kappa, \Theta_{ISW}\}$ peuvent toutes être écrites sous la forme

$$A(\boldsymbol{\theta}) = \int_0^\infty dz \hat{\mathcal{O}}_A(\vec{x}(z, \boldsymbol{\theta}), z). \quad (8.51)$$

Par exemple, $\hat{\mathcal{O}}_{\delta_g} = W(z, z_0) \delta_g(\boldsymbol{\theta}, z)$, ou encore $\hat{\mathcal{O}}_\kappa = \frac{1}{2} \frac{c}{H(z)} g(z, z_0) \nabla_\perp^2 \Phi[\chi(z) \boldsymbol{\theta}, z]$, etc. Appelons $w_{AB}(\theta)$ la fonction de corrélation à deux points à deux dimensions des variables A et B

$$w_{AB}(\theta) \equiv \langle A(\boldsymbol{\theta}).B(\boldsymbol{\theta}') \rangle \quad (8.52)$$

où $\cos \theta = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}'$. On peut introduire les composantes du spectre de puissance angulaire C_ℓ^{AB} comme étant les coefficients de Legendre de la fonction de corrélation :

$$w_{AB}(\theta) = \sum_\ell \frac{2\ell+1}{4\pi} C_\ell^{AB} P_\ell(\cos \theta) \quad (8.53)$$

En utilisant l'approximation de Limber (qui est valide pour des multipôles $\ell \gtrsim 10$ [185]), on peut montrer que le spectre de puissance angulaire est relié au spectre de puissance à 3 dimensions au travers de

$$C_\ell^{AB} = \int_0^\infty dz \frac{H(z)}{c} \frac{1}{\chi^2(z)} P_{AB} \left(\frac{\ell+1/2}{\chi(z)}, z \right), \quad (8.54)$$

où $P_{AB}(k, z)$ est le spectre de puissance des corrélations A - B , pour un mode de norme k

¹⁰Integrated Sachs-Wolfe effect (ISW) en anglais.

et à un temps t tel que $a(t) = 1/(1+z)$, défini au travers de¹¹

$$P_{AB}(k, z) \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}'} \left\langle \hat{\mathcal{O}}_A(\vec{x}) \cdot \hat{\mathcal{O}}_B(\vec{x} + \vec{x}') \right\rangle. \quad (8.55)$$

Ce formalisme général peut être appliqué à diverses corrélations d'observables. Ces observables dépendant directement de la forme des équations des perturbations, la comparaison des corrélations permet de contraindre les modèles d'énergie noire [36, 42, 162, 232, 233, 253, 268, 294, 295].

Un exemple : comment contraindre les paramètres η et Q dans le cas de conditions initiales adiabatiques

Afin d'illustrer la méthodologie qui permet de contraindre les modèles d'énergie noire, nous voudrions présenter une méthode schématique permettant de mesurer les fonctions η et Q que nous avons définies au travers des équations (8.31) et (8.32) dans le cas de conditions initiales adiabatiques (ou d'une manière générale dans le cas où les équations d'Einstein prennent la forme des équations (8.31) et (8.32)). Nous allons considérer trois types de corrélations : les auto-corrélations des galaxies, les corrélations galaxies-convergence (souvent appelées galaxies-galaxies), et les corrélations galaxies-vitesse des galaxies. Nous supposons que les fonctions de sélection $W(z, z_0)$ sont assez étroites pour que le biais soit à peu près identique pour toutes les galaxies retenues par la fonction de sélection. On peut calculer les fonctions de corrélations

$$C_\ell^{gg}(z_1, z_2) = b(z_1)b(z_2) \int_0^\infty dz \frac{H(z)}{c} \frac{W(z, z_1)W(z, z_2)}{\chi^2(z)} P_m \left(\frac{\ell + 1/2}{\chi(z)}, z \right), \quad (8.56)$$

$$C_\ell^{g\theta_g}(z_1, z_2) = b(z_1) \int_0^\infty dz \frac{H^2(z)}{c} \frac{W(z, z_1)W(z, z_2)}{\chi^2(z)} \frac{f(z)}{1+z} P_m \left(\frac{\ell + 1/2}{\chi(z)}, z \right), \quad (8.57)$$

$$C_\ell^{g\kappa}(z_1, z_2) = b(z_1) \int_0^\infty dz \frac{W(z, z_1)g(z, z_2)}{\chi^2(z)} \times \frac{4\pi G_{\text{cav},0} \bar{\rho}_m Q(1+\eta)}{(1+z)^2} P_m \left(\frac{\ell + 1/2}{\chi(z)}, z \right), \quad (8.58)$$

où P_m est le spectre de puissance de la matière noire. Zhang *et al.* [295] ont suggéré de construire des quantités qui permettent de s'affranchir du biais. On peut ainsi considérer le rapport

$$\frac{C_\ell^{g\theta_g}(z_1, z_2) C_\ell^{\theta_g g}(z_1, z_2)}{C_\ell^{gg}(z_1, z_2)} \quad (8.59)$$

¹¹Pour être précis, il faut prendre dans l'équation (8.55) la définition $\hat{\mathcal{O}}_\kappa(\vec{x}) = \frac{1}{2} \frac{c}{H(z)} g(z, z_0) \nabla^2 \Phi[\chi(z)\vec{\theta}, z]$, où l'on a remplacé le Laplacien à deux dimensions en coordonnées sphériques ∇_\perp^2 par le Laplacien à 3D. Cette approximation revient à identifier les valeurs propres du Laplacien à 2D $-\ell(\ell+1)/\chi$ aux valeurs propres $-k^2$ du Laplacien à 3D calculées pour $k = (\ell + 1/2)/\chi$. On vérifie facilement que cette approximation est cohérente avec le domaine de validité de l'approximation de Limber, car pour $\ell \gtrsim 10$, $\ell(\ell+1) \simeq (\ell + 1/2)^2$.

qui permet d’avoir accès au spectre de puissance de la matière noire dès lors que l’on suppose les paramètres de la métrique de fond ($\bar{\rho}_m, H(z), \dots$) connus ; en mesurant ce spectre à différents redshifts, on peut (en principe) reconstruire le taux d’expansion $f(z)$ et mesurer ainsi la combinaison Q/η au travers de l’équation de croissance des perturbations (8.33). D’autre part, on peut considérer le rapport [295]

$$\frac{C_\ell^{g\kappa}(z_1, z_2)}{C_\ell^{g\theta_g}(z_1, z_2)} \quad (8.60)$$

qui est indépendant du biais et permet de mesurer la combinaison $Q(1+\eta)$. L’association des deux mesures permet donc de contraindre complètement le modèle.

8.3.5 Corrélations galaxies-galaxies, galaxies-amplification et méthodes géométriques

Nous venons de montrer que les corrélations cosmologiques permettaient de contraindre l’évolution des quantités perturbées dès lors que la métrique de fond était connue ; cependant, il est également possible d’utiliser ces corrélations pour contraindre l’évolution de la métrique de fond. En effet, les observables que nous avons présentées dépendent de la métrique de fond, et ce doublement : d’une façon géométrique (au travers de la fonction $\chi(z)$, $H(z)$, etc.), et d’une manière que l’on pourrait qualifier de *dynamique*, c’est-à-dire au travers des équations de perturbations.

En pratique, l’analyse des données cosmologiques (SN Ia+BAO+effets de lentilles+...) est souvent faite en supposant *a priori* un modèle cosmologique qui décrit à la fois l’évolution de la métrique de fond, la forme des perturbations initiales et la forme des équations de perturbations (comme par exemple le modèle Λ CDM, ou les modèles de gravité modifiée paramétrisés par les fonctions η et Q , elles-mêmes paramétrisées par des constantes [12], etc.). La valeur du vecteur de paramètres qui maximise la fonction de vraisemblance est ensuite déterminée à l’aide de simulations de Monte-Carlo. Cette méthode extrait donc en même temps l’information qui concerne la métrique de fond et les perturbations. En particulier, il n’est pas fait de distinction entre les informations “géométriques” et “dynamiques” qui peuvent être présentes dans l’analyse des observables liées aux perturbations.

Pourtant, il peut être intéressant de bien séparer les informations que l’on peut extraire des perturbations selon qu’elles soient de nature géométrique ou dynamique. Cela permet en effet de mesurer les paramètres de la métrique de fond ($\Omega_{de}, w_{de}, \dots$) à partir des observables liées aux perturbations, sans faire trop d’hypothèses *a priori* sur la forme des équations de perturbations, qui peuvent différer de celles de la RG. Cette idée est la base des méthodes *géométriques* [161, 279, 293, 297]. Nous voudrions ici présenter le principe de la méthode géométrique proposée par Jain et Taylor [161] permettant d’estimer les paramètres de l’énergie noire à partir des corrélations galaxies-galaxies.

Considérons trois ensembles de galaxies, localisés à trois redshifts différents (cf. Fig. 8.6). Les deux ensembles les plus éloignés sont localisés aux redshifts z_{b1} et z_{b2} : il s’agit des galaxies d’arrière-plan. Les galaxies les plus proches de l’observateur sont localisées autour du redshift z_f et correspondent à l’avant-plan. Considérons les corrélations $C_\ell^{g\kappa}(z_f, z_{bi})$, avec $i = 1, 2$. Schématiquement, la convergence $\kappa(z_{bi})$ dépend de l’intégrale du Laplacien du potentiel Φ le long de la ligne de visée ; en corrélant cette intégrale avec $\delta_g(z_f)$ qui est principalement localisée autour de z_f , on ne conserve que la partie de l’intégrale de

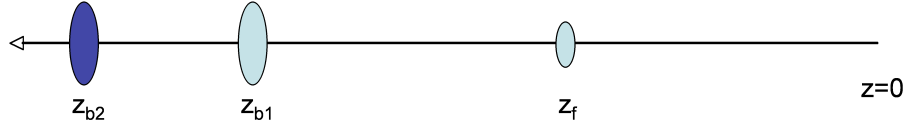


FIG. 8.6 – Schéma de la localisation des trois ensembles de galaxies utilisés par la méthode géométrique de Jain et Taylor [161]. Les deux populations d'arrière-plan sont situées aux redshifts z_{b1} et z_{b2} tandis que les galaxies d'avant-plan sont localisées autour de z_f .

$\kappa(z_{bi})$ au voisinage de z_f . Cela permet donc de faire de la tomographie, c'est-à-dire d'avoir accès à des quantités localisées dans l'espace à 3D à partir de quantités à 2D comme la convergence. Plus quantitativement, si l'on suppose que les fonctions de sélections sont suffisamment étroites pour pouvoir faire l'approximation $W(z, z_0) \simeq \delta(z - z_0)$, on obtient les expressions

$$C_\ell^{g\kappa}(z_f, z_{bi}) = b(z_f) \frac{\chi(z_{bi}) - \chi(z_f)}{\chi(z_f)\chi(z_{bi})} \frac{1}{2} \left(\frac{\ell + 1/2}{\chi(z_f)} \right)^2 P_{\Phi\delta_m} \left(\frac{\ell + 1/2}{\chi(z)}, z \right) \quad (8.61)$$

où $P_{\Phi\delta_m}$ est le spectre de puissance des corrélations entre le potentiel Φ et les perturbations de matière noire. On remarque alors qu'il est possible d'obtenir une quantité strictement géométrique en considérant le rapport

$$R = \frac{C_\ell^{g\kappa}(z_f, z_{b1})}{C_\ell^{g\kappa}(z_f, z_{b2})} = \frac{(\chi(z_{b1}) - \chi(z_f)) \chi(z_{b2})}{(\chi(z_{b2}) - \chi(z_f)) \chi(z_{b1})}. \quad (8.62)$$

La fonction χ dépendant du contenu en matière $\Omega_{m,0}, \Omega_{de,0}$ et de l'équation d'état de l'énergie noire, la mesure du rapport R permet de contraindre ces paramètres de la métrique de fond, sans rien supposer quant à la forme des équations de perturbations. En particulier, nous n'avons pas eu besoin de faire d'hypothèse concernant la forme de l'équation de Poisson. Cette méthode, qui est moins précise que le CMB ou les SN IA pour mesurer les paramètres $\Omega_{m,0}, \Omega_{de,0}$ et de l'équation d'état de l'énergie noire est cependant très intéressante, car elle ne fait que très peu d'hypothèses *a priori* sur les équations de perturbations, et est notamment valide dans les théories de gravité modifiée, du moment que la lumière suit des géodésiques nulles. Elle permet donc une mesure du contenu de l'Univers, indépendante des autres méthodes. Nous reviendrons au Chapitre 9 sur les corrélations galaxies-galaxies et les méthodes géométriques. En effet, nous y présenterons les limitations que le biais d'amplification impose sur ces méthodes d'observation, limitations que nous avons exposées Lam Hui et moi-même dans l'article [297].

8.3.6 La Relativité Générale en défaut ?

Pour conclure cette section consacrée aux contraintes sur les modèles de gravité, issues des observations cosmologiques, nous voudrions évoquer un récent article de Rachel Bean [36] qui affirme que la RG est mise à mal par les observations ! Les données utilisées sont WMAP 5 pour le CMB, les catalogues 2MASS et SDSS pour les galaxies et le catalogue COSMOS du HST pour l'effet de lentille. Ce résultat, s'il venait à être confirmé, serait bien entendu un bouleversement complet des lois de la physique, justifiant par là-même

les efforts de recherche sur les théories de modifications de la gravité. Pour arriver à cette conclusion, R. Bean a paramétrisé les équations des perturbations d'une façon très similaire à la paramétrisation que nous avons proposée plus haut aux équations (8.31) et (8.32), en définissant

$$\gamma(k, a) \equiv \frac{\ln(\dot{\delta}_m / H\delta_m)}{\ln \Omega_m}, \quad \eta(k, a) \equiv \frac{\psi}{\phi}. \quad (8.63)$$

L'analyse de R. Bean utilise les corrélations ISW-ISW, δ_g - δ_g , κ - κ et ISW- δ_g , et consiste à rechercher les valeurs des paramètres γ et η (qui sont supposés constants pour $z < 1$) qui maximisent la fonction de vraisemblance des données ; les valeurs ainsi obtenues pour le paramètre η sont très nettement différentes de 1 : l'analyse semble donc exclure la RG.

Il est encore trop tôt pour juger de la validité de ce résultat. Avant de tirer toute conclusion, il sera en effet nécessaire d'attendre que les calculs effectués soient vérifiés par d'autres groupes, et surtout que le même type d'analyse soit effectué en utilisant d'autres données (comme celles du CFHTLS par exemple). De plus, nous avons vu à la Section 8.3.2 que la présence d'une pression anisotrope créant un paramètre $\eta \neq 1$ n'est pas contradictoire avec la RG, mais seulement avec le modèle très simple qu'est le modèle Λ CDM. Nous souhaitons néanmoins présenter les résultats de l'article [36] dans le cadre de ce mémoire, non comme un élément avéré, mais comme une illustration, des plus récentes, de la méthodologie qui permet de contraindre les lois de la gravité à partir de la cosmologie.

8.4 Tester la gravité avec les ondes gravitationnelles

Un dernier type d'observables, qui peuvent permettre de contraindre les lois de la gravité, sont les ondes gravitationnelles.

8.4.1 Ondes gravitationnelles et observations

Les ondes gravitationnelles primordiales, produites durant l'inflation, jouent un rôle important en cosmologie. En effet, la comparaison entre les spectres de puissance des modes cosmologiques tensoriels et scalaires permet de contraindre les modèles d'inflation. Ce type d'ondes gravitationnelles primordiales peut être détecté au travers des modes B du CMB.

Des ondes gravitationnelles sont également produites par des sources astrophysiques, et en particulier par les systèmes binaires, dans lesquels deux objets compacts s'effondrent l'un sur l'autre. En effet, la RG prédit que tout corps dont la distribution possède un moment quadrupolaire en mouvement émet des ondes gravitationnelles. Dans le cas d'un système binaire de deux objets compacts de masses m_1 et m_2 , en coalescence à une fréquence f , l'intensité des ondes gravitationnelles reçues à une distance luminosité D_L du système prend la forme

$$h_{+ \times} \propto \frac{[(1+z)\mathcal{M}]^{5/3} f^{2/3}}{D_L}, \quad (8.64)$$

où $\mathcal{M} \equiv (m_1 m_2)^{3/5} / (m_1 + m_2)^{1/5}$. De plus, l'émission de ces ondes correspond à une perte d'énergie de la part du système, dont la période de rotation augmente alors selon

$$\frac{df}{dt} = \frac{96}{5\pi\mathcal{M}^2} (\pi\mathcal{M}f)^{11/3}. \quad (8.65)$$

En mesurant la variation de la période du système binaire, on peut démontrer, d'une façon *indirecte*, l'existence d'ondes gravitationnelles. La première détection de ce type a été effectuée par Taylor et Hulse en 1974, qui ont pu vérifier que la variation de période du pulsar binaire PSR 1913+16 correspondait aux prédictions de la RG. Plusieurs expériences sont en cours, ou en préparation, pour détecter d'une façon *directe* les ondes gravitationnelles, parmi lesquelles on peut citer les observatoires LIGO et VIRGO, ainsi que le futur interféromètre spatial LISA.

L'interféromètre LISA devrait permettre de connaître la position angulaire des sources d'ondes gravitationnelles [79, 272]. En pointant en même temps des instruments optiques dans la même direction, il sera alors possible de repérer l'événement responsable des ondes gravitationnelles, et de mesurer son redshift. Cela permettra de construire un *diagramme de Hubble gravitationnel* [237], grâce à la relation (8.64) entre l'intensité des ondes gravitationnelles et la distance luminosité D_L .

8.4.2 Diagramme de Hubble gravitationnel et dimensions supplémentaires

C. Deffayet et K. Menou ont proposé, en 2007 [100], de tester certaines modifications à grandes distances de la gravitation en comparant le diagramme de Hubble gravitationnel au diagramme standard obtenu à partir des SN Ia. En effet, dans les modèles de modifications de la gravité possédant une dimension supplémentaire, comme le modèle DGP, les ondes gravitationnelles ont la possibilité de pénétrer dans la cinquième dimension tandis que les photons restent confinés sur la brane. On obtient alors deux diagrammes de Hubble distincts ; la différence entre les deux diagrammes signe la présence de dimensions supplémentaires.

Plus précisément, nous avons vu à l'équation (8.64) que dans le cas d'un espace à quatre dimensions,

$$h_{+\times} \propto 1/D_L. \quad (8.66)$$

Dans le cadre d'un univers branaire, et pour un objet suffisamment loin, les ondes gravitationnelles peuvent se propager dans les dimensions supplémentaires. En imposant que le flux d'énergie au travers d'une sphère à $(d-1)$ dimensions soit constant, on obtient [100]

$$h_{+\times} \propto 1/D_L^{(d-2)/2}, \quad (8.67)$$

où d est la dimension de l'espace. Pour $d \geq 5$, l'intensité des ondes gravitationnelles reçues est donc plus faible que l'équivalent à quatre dimensions. Les objets apparaissent dès lors plus éloignés que ce qu'indiquerait la mesure optique.

Pour déterminer la distance à partir de laquelle le comportement des ondes gravitationnelles cesse d'être quadri-dimensionnel, il est nécessaire d'effectuer un calcul précis de la propagation des ondes, dans un modèle de gravité modifiée par la présence de dimensions supplémentaires.

8.4.3 Propagation des ondes gravitationnelles dans le modèle DGP

Nous allons prendre l'exemple du modèle DGP, et calculer l'effet de la "fuite" des ondes gravitationnelles dans la dimension supplémentaire. Le calcul présenté ici, effectué

en collaboration avec C. Deffayet et K. Menou, correspond à un travail original, dans le prolongement de l'article [100] de C. Deffayet et K. Menou.

Signal reçu et fonction de Green retardée

Considérons une source $S(t', \vec{r}', y') = s(t', \vec{r}')\delta(y')$ située sur la brane. Nous souhaitons calculer le signal $F(t, \vec{r}, y=0) = f(t, \vec{r})$, reçu par un observateur également sur la brane, au point $(t, \vec{r}, y=0)$. Nous ne tiendrons pas compte de la structure tensorielle des ondes gravitationnelles, et nous concentrerons sur la propagation d'un simple mode scalaire.

Nous allons utiliser la fonction de Green retardée, qui est telle que

$$D_{DGP}^{(t, \vec{r}, y)} \left[G_{DGP}^{(5)}(t, t'; \vec{r}, \vec{r}'; y, y') \right] = -\delta(t - t')\delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(y - y'), \quad (8.68)$$

$$G_{DGP}^{(5)}(t, t'; \vec{r}, \vec{r}'; y, y') = 0 \quad \text{if } t < t', \quad (8.69)$$

où $D_{DGP}^{(t, \vec{r}, y)} \equiv M^3 (\partial_\mu \partial^\mu + \partial_y \partial^y + 2r_c \delta(y) \partial_\mu \partial^\mu)$ est l'opérateur différentiel 5D qui gouverne la propagation du graviton dans le modèle DGP [111]. Une fois $G_{DGP}^{(5)}$ connue, le signal reçu par l'observateur prend la forme

$$f(t, \vec{r}) = \int dt' \int d^3 \vec{x}' \int dy' G_{DGP}^{(5)}(t, t'; \vec{r}, \vec{r}'; y=0, y') S(t', \vec{r}', y') \quad (8.70)$$

$$= \int dt' \int d^3 \vec{x}' G_{DGP}^R(t - t'; \vec{r} - \vec{r}') s(t', \vec{r}'), \quad (8.71)$$

où nous avons défini la fonction de Green à "4D"

$$G_{DGP}^R(t - t'; \vec{r} - \vec{r}') = G_{DGP}^{(5)}(t, t'; \vec{r}, \vec{r}'; y=0, y'=0), \quad (8.72)$$

qui ne peut dépendre que de la différence $x - x'$.

La fonction de Green de DGP est calculée dans les articles [110, 111]. Dans l'espace de Fourier¹², elle prend la forme que nous avons donnée à l'équation (2.16) :

$$G_{DGP,R}^{(5)}(p; y=0) = \int_0^\infty dm \frac{2}{\pi} \frac{2r_c}{4 + m^2 r_c^2} \frac{1}{p^2 + m^2}. \quad (8.76)$$

Dans l'espace réel, la fonction de Green s'écrit donc

$$G_{DGP}^R(t; \vec{r}) = \int_0^\infty dm \frac{2}{\pi} \frac{2r_c}{4 + m^2 r_c^2} G_R(x|m), \quad (8.77)$$

¹² Nous utilisons les conventions suivantes pour les transformées de Fourier

$$\tilde{f}(\omega, \vec{k}) = \int dt d^3 \vec{x} e^{-i x_\mu k^\mu} f(t, \vec{x}), \quad (8.73)$$

$$f(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega d\vec{k} e^{i x_\mu k^\mu} \tilde{f}(\omega, \vec{k}), \quad (8.74)$$

$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t_0)}. \quad (8.75)$$

où nous avons introduit le propagateur massif

$$G_R(x|m) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \int_0^\infty dm \frac{2}{\pi} \frac{1}{p^2 + m^2} . \quad (8.78)$$

Afin que le propagateur corresponde au propagateur retardé, les pôles doivent être situés sous l'axe réel ; le propagateur massif s'écrit donc

$$G_R(x|m) = \int \frac{d\omega d^3 \vec{p}}{(2\pi)^4} e^{i\omega t - i\vec{p} \cdot \vec{x}} \frac{1}{-(\omega + i\epsilon)^2 + \vec{p}^2 + m^2} , \quad (8.79)$$

qui après intégration [56], mène à

$$G_R(x|m) = -\frac{1}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \left[J_0 \left(m \sqrt{t^2 - r^2} \right) \Theta(t - r) \right] \quad (8.80)$$

$$= \frac{1}{4\pi r} \delta(t - r) - \frac{1}{4\pi r} \Theta(t - r) \frac{m r}{\sqrt{t^2 - r^2}} J_1 \left(m \sqrt{t^2 - r^2} \right) . \quad (8.81)$$

On peut ensuite intégrer sur les modes massifs :

$$G_{DGP}^R(x) = \int_0^\infty dm \frac{2}{\pi} \frac{2r_c}{4 + m^2 r_c^2} G_R(x|m) \quad (8.82)$$

$$= \frac{1}{4\pi r} \delta(t - r) - \frac{\Theta(t - r)}{\pi^2 r_c \sqrt{t^2 - r^2}} \int_0^\infty dm \frac{m}{m^2 + 4/r_c^2} J_1 \left(m \sqrt{t^2 - r^2} \right) . \quad (8.83)$$

En utilisant l'identité¹³ :

$$\int_0^\infty dx \frac{x J_1(ax)}{x^2 + k^2} = \frac{\pi}{2} [-I_1(ak) + \mathbf{L}_{-1}(ak)] , \quad (8.85)$$

où le symbole \mathbf{L} correspond aux fonctions de Struve, on obtient finalement

$$G_{DGP}^R(x) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t - r) - \frac{\Theta(t - r)}{2\pi r_c \sqrt{t^2 - r^2}} \mathcal{E} \left(\frac{1}{r_c} \sqrt{t^2 - r^2} \right) . \quad (8.86)$$

Dans l'expression ci-dessus, nous avons défini la fonction

$$\mathcal{E}(z) \equiv [-I_1(2z) + \mathbf{L}_{-1}(2z)] . \quad (8.87)$$

On peut montrer que la fonction $\mathcal{E}(z)$ est bornée par 1 dans le quart supérieur droit du plan complexe, et qu'autour de 0, elle se comporte selon $\mathcal{E}(z) \sim 2/\pi - z$. De plus, nous utiliserons le fait que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} \mathcal{E}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1 - e^{\frac{1}{\alpha}} \text{Erfc} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) , \quad (8.88)$$

pour α situé dans le quart supérieur droit du plan complexe (nous avons choisi la coupure de la fonction racine, le long du demi-axe réel négatif). Cette dernière relation peut être obtenue pour α complexe par continuation analytique, à partir du cas α réel. La fonction $\text{Erfc} \equiv 1 - (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z e^{-t^2} dt$ est la fonction complémentaire de la fonction erreur.

Nous utiliserons ces résultats pour calculer le signal reçu par un observateur dans le cas d'une source périodique.

¹³L'identité (8.85) peut être obtenue en dérivant, par rapport à a , l'équation 6.532-6 de [137]

$$\int_0^{+\infty} \frac{J_0(ax)}{x^2 + k^2} = \frac{\pi}{2k} [I_0(ak) - \mathbf{L}_0(ak)] . \quad (8.84)$$

8.4.4 Signal d'une source périodique

Considérons une source périodique $s(t', \vec{r}') = e^{-i\omega_0 t'} \delta(\vec{r}')$. L'intégration sur \vec{x}' dans l'équation (8.71) est aisée ; puis, en effectuant le changement de variable $u = t - t'$, nous obtenons

$$\begin{aligned} f(r, t) &= e^{-i\omega_0 t} \int du G_{DGP}^R(u; \vec{r}) e^{i\omega_0 u} \\ &= \frac{1}{4\pi r} e^{-i\omega_0(t-r)} - \frac{e^{-i\omega_0 t}}{2\pi r_c} \int_r^\infty du \frac{e^{i\omega_0 u}}{\sqrt{u^2 - r^2}} \mathcal{E}\left(\frac{1}{r_c} \sqrt{u^2 - r^2}\right). \end{aligned} \quad (8.89)$$

Introduisons $x \equiv u/r_c$ et $x_c \equiv r/r_c$. Définissons également $N \equiv \omega_0 r_c$; la période de rotation des systèmes binaires étant une grandeur astrophysique, elle est beaucoup plus petite que l'échelle cosmologique r_c , ce qui signifie que $N \gg 1$. Concentrons-nous sur l'intégrale sur u :

$$I(x_c, N) = \int_r^\infty du \frac{e^{i\omega_0 u}}{\sqrt{u^2 - r^2}} \mathcal{E}\left(\frac{1}{r_c} \sqrt{u^2 - r^2}\right) = \int_{x_c}^\infty du \frac{e^{iNx}}{\sqrt{x^2 - x_c^2}} \mathcal{E}\left(\sqrt{x^2 - x_c^2}\right). \quad (8.90)$$

On peut simplifier cette intégrale en fermant le contour, par un demi-cercle à l'infini dans le plan complexe, puis le long de l'axe vertical $z = x_c + iy$. L'intégration à l'infini donne une contribution nulle, car la fonction $\mathcal{E}(z)$ est bornée et l'exponentielle décroissante. On obtient alors

$$I(x_c, N) = ie^{iNx_c} \int_0^\infty dy \frac{e^{-Ny}}{\sqrt{-y^2 + 2ix_c y}} \mathcal{E}\left(\sqrt{-y^2 + 2ix_c y}\right) \quad (8.91)$$

$$= \frac{ie^{i\omega_0 r}}{N} \int_0^\infty da \frac{e^{-a}}{\sqrt{-a^2/N^2 + 2ix_c a/N}} \mathcal{E}\left(\sqrt{-a^2/N^2 + 2ix_c a/N}\right) \quad (8.92)$$

Étant donné que $|\mathcal{E}| < 1$, la présence de l'exponentielle dans l'intégrale impose $a \lesssim 1$. De plus, on peut faire l'hypothèse que $x_c N = r\omega_0 \gg 1$, car $r\omega_0 \sim r/L$ où L est la taille typique du système binaire, qui est beaucoup plus petite que la distance qui sépare le système de l'observateur. On peut alors simplifier l'argument des fonctions racines de l'équation (8.91) : $-a^2/N^2 + 2ix_c a/N \sim 2ix_c a/N$, ce qui permet d'obtenir

$$I(x_c, N) = \frac{ie^{i\omega_0 r}}{N} \int_0^\infty da \frac{e^{-a}}{\sqrt{2ix_c a/N}} \mathcal{E}\left(\sqrt{2ix_c a/N}\right) \quad (8.93)$$

$$= \frac{e^{i\omega_0 r}}{2x_c} \int_0^\infty dz \frac{e^{-\left(\frac{N}{2ix_c}\right)z}}{\sqrt{z}} \mathcal{E}(\sqrt{z}) \quad (8.94)$$

$$= \frac{e^{i\omega_0 r}}{2x_c} \left[1 - e^{\frac{2ix_c}{N}} \text{Erfc}\left(\sqrt{\frac{2ix_c}{N}}\right) \right], \quad (8.95)$$

où nous avons une nouvelle fois effectué une intégration de contour, et utilisé la formule (8.88). En combinant cette dernière relation avec l'équation (8.89), on arrive enfin à

$$f(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi r} e^{-i\omega_0(t-r)} \times \text{Erfc}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2r}{\omega_0 r_c^2}}\right) e^{\frac{2ir}{\omega_0 r_c^2}}. \quad (8.96)$$

Pour interpréter physiquement ce résultat, nous pouvons étudier deux limites :

- à petites distances,

$$f(t, \vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi r} e^{-i\omega_0(t-r)} \times \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2r}{\omega_0 r_c^2}} \right). \quad (8.97)$$

On vérifie que l'on retrouve ici le comportement 4D de la théorie, car $|f| \propto 1/r$.

- à grandes distances, on peut utiliser le développement $\left| \text{Erfc} \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{x} \right) \right| \sim 1/\sqrt{x}$, valable pour $x \gg 1$, ce qui nous permet de vérifier que $|f| \propto 1/r^{3/2}$, en accord avec l'équation (8.67).

La transition entre les régimes 4 et 5D n'a pas lieu à $r \sim r_c$, mais à l'échelle $r \sim r_c^2 \omega_0$. Cet effet a été nommé “transparence infrarouge” dans l'article [113] et peut être vu comme un effet relativiste de dilatation des distances [113, 139]. En effet, dans le référentiel propre de chaque mode massif, la transition entre les comportements 4- et 5-dimensionnels a lieu à une échelle r_c ; dans le référentiel de l'observateur, cette échelle est multipliée par le facteur relativiste $\gamma \sim \omega_0/m \sim \omega r_c$. Pour des sources standard, la pulsation ω_0 est telle que $r_c \omega_0 \gg 1$, car r_c est d'ordre cosmologique, tandis que la pulsation est de l'ordre de l'inverse de la taille caractéristique d'un système binaire. Par conséquent, l'effet de “fuite” des ondes gravitationnelles émises par un système binaire dans le modèle DGP n'est pas observable à partir de sources astrophysiques situées à l'intérieur du rayon de Hubble, comme cela avait déjà été noté dans l'article [100]. Il serait intéressant de généraliser ce calcul à d'autres modèles, afin de déterminer dans quelle mesure le phénomène de transparence infrarouge est générique, et d'identifier les modèles pour lesquels la comparaison des diagrammes de Hubble gravitationnel et électromagnétique peut permettre de contraindre la présence de dimensions supplémentaires.

Au cours de ce chapitre, nous avons eu l'occasion de présenter de nombreux tests expérimentaux, que doit satisfaire tout modèle de gravité pour être viable. Les tests locaux, en laboratoire ou au sein du système solaire et des pulsars binaires, imposent à la gravité d'être très proche de la Relativité Générale à petites distances. Ces contraintes justifient l'intérêt des mécanismes du caméléon et de Vainshtein. À condition d'être dans leur régime non-linéaire, ces mécanismes garantissent en effet au modèle considéré, d'être proche de la Relativité Générale à petites distances.

Le régime linéaire¹⁴ des modèles de gravité modifiée peut quant à lui être testé par la cosmologie et l'observation des ondes gravitationnelles. Nous avons vu que la combinai-

¹⁴L'adjectif linéaire renvoie ici au régime dans lequel les interactions non-linéaires entre les champs responsables de la gravité (graviton et éventuellement champ scalaire) ne sont pas importantes. Nous voudrions attirer l'attention du lecteur sur le fait que la notion de non-linéarité peut s'appliquer à deux phénomènes différents. D'une part, il existe une échelle à partir de laquelle la gravité n'est plus dans le régime linéaire. Cette échelle est le rayon de Schwarzschild en RG, R_V pour le mécanisme de Vainshtein,

son de ces différentes observables pouvait se révéler être une méthode très efficace pour contraindre la gravité.

Concernant les perturbations cosmologiques, nous avons surtout insisté dans ce chapitre sur le régime linéaire. C'est en effet celui qui a été le plus étudié jusqu'à présent. Au-delà de ce régime linéaire, il nous semble que l'étude du régime non-linéaire des perturbations constitue une direction de recherche très prometteuse, qui commence tout juste à être explorée [208, 209, 234]. La transition entre le régime de gravité modifiée et le régime de couplage fort, proche de la Relativité Générale, a précisément lieu dans le régime non-linéaire des perturbations cosmologiques. Tester la gravité à ces échelles permettra donc de contraindre fortement les modèles de gravité modifiée.

et correspond au phénomène de coquille mince dans le cadre des modèles de caméléon. D'autre part, la notion de non-linéarité peut renvoyer au régime non-linéaire des perturbations cosmologiques, pour lequel $\delta \sim 1$. Il se trouve que la transition vers chacun de ces régimes non-linéaires a lieu à peu près aux mêmes échelles.

Chapitre 9

Corrélations galaxies-lentilles et corrections dues au biais d'amplification

Sommaire

9.1	Les corrélations galaxies-lentilles	231
9.2	Magnification Bias Corrections to Galaxy-Lensing Cross-Correlations (article)	234

Ce chapitre est consacré aux corrélations galaxies-galaxies et galaxies-amplification, et plus précisément aux corrections apportées à ces corrélations par le biais d'amplification des galaxies d'avant-plan. Ces corrections sont généralement considérées comme négligeables. Nous avons cependant montré, le Pr. L. Hui et moi-même, que cette simplification n'est pas toujours justifiée, et que négliger systématiquement le biais d'amplification de l'avant-plan peut mener à une erreur importante dans l'évaluation des corrélations galaxies-galaxies et galaxies-amplification (nous regrouperons ces deux types de corrélations sous la dénomination *corrélations galaxies-lentilles*¹). Ces résultats, que nous présentons dans ce chapitre, ont fait l'objet de l'article intitulé *Magnification Bias Corrections to Galaxy-Lensing Cross-Correlations* [297], publié dans le journal *Physical Review D*.

Après une rapide présentation des corrélations galaxies-lentilles et des principaux résultats de l'article [297], nous reproduisons ci-dessous le texte de l'article [297] proprement dit.

9.1 Les corrélations galaxies-lentilles

Les corrélations galaxies-lentilles consistent à corrélérer le signal de lentille gravitationnelle faible, provenant d'un groupe de galaxies situées à l'arrière-plan, avec la densité d'un catalogue de galaxies situées à l'avant-plan. Appelons z_b le redshift moyen des galaxies

¹Traduction française de l'expression anglo-saxonne *galaxy-lensing correlations*.

d'arrière-plan et $z_f < z_b$ le redshift des galaxies d'avant-plan (cf. figure 9.1). Le signal de

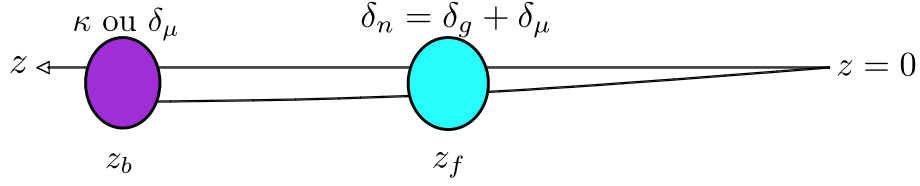


FIG. 9.1 – Schéma de la localisation des deux ensembles de galaxies utilisés dans les corrélations galaxies-lentille. Les galaxies de l'arrière-plan sont situées au redshift z_b tandis que les galaxies d'avant-plan sont localisées autour de z_f .

lentille des galaxies d'arrière-plan peut être, soit la convergence $\kappa(z_b)$, qui est mesurée à partir du cisaillement [141, 142, 164, 190, 191, 210, 245, 246, 247], soit le biais d'amplification² $\delta_\mu(z_b)$ [53, 128, 132, 133, 140, 147, 160, 192, 196, 197, 200, 236, 240, 261, 273, 274, 281]. Ces observables dépendent de l'intégrale du Laplacien des potentiels gravitationnels le long de la ligne de visée ; en corrélant cette intégrale avec la densité de galaxies $\delta_g(z_f)$ de l'avant-plan, on ne conserve de l'intégrale que la partie au voisinage de z_f . Cela permet donc de faire de la tomographie, c'est-à-dire d'avoir accès à des quantités localisées dans l'espace à 3D à partir de quantités 2D, comme la convergence. Nous avons vu à la Section 8.3.4 de ce mémoire que ces corrélations pouvaient être précieuses pour tester la forme des équations de perturbations cosmologiques ; la Section 8.3.5 nous a également donné l'opportunité de présenter la méthode géométrique proposée par Jain et Taylor [161] qui permet de mesurer les paramètres Ω_{de}, w_{de} à partir des corrélations galaxies-lentilles. Nous souhaitons à présent détailler un peu plus le principe de ces corrélations et comment le biais d'amplification des galaxies de l'avant-plan peut être amené à y jouer un rôle.

Commençons par les corrélations galaxies-convergence (communément appelées corrélations galaxies-galaxies). Elles consistent à mesurer la fonction de corrélation $\langle \delta_g(z_f) \kappa(z_b) \rangle$. Cependant, nous avons vu à l'équation (8.46), que le simple comptage des galaxies ne permettait pas d'avoir directement accès à la densité intrinsèque de galaxies δ_g , mais seulement à la densité nette, c'est-à-dire altérée par le biais d'amplification : $\delta_n = \delta_g + \delta_\mu$. La fonction de corrélation effectivement mesurée prend donc la forme

$$\begin{aligned} w_{n\kappa}(\theta, z_f, z_b) &\equiv \langle \delta_n(\boldsymbol{\theta}, z_f) \kappa(\boldsymbol{\theta}', z_b) \rangle \\ &= \langle \delta_g(\boldsymbol{\theta}, z_f) \kappa(\boldsymbol{\theta}', z_b) \rangle + \langle \delta_\mu(\boldsymbol{\theta}, z_f) \kappa(\boldsymbol{\theta}', z_b) \rangle \\ &= w_{g\kappa}(\theta, z_f, z_b) + w_{\mu\kappa}(\theta, z_f, z_b) \end{aligned} \quad (9.1)$$

Dans l'espace des multipôles, on obtient [297] le spectre de puissance angulaire

$$C_\ell^{n\kappa}(z_f, z_b) = C_\ell^{g\kappa}(z_f, z_b) + C_\ell^{\mu\kappa}(z_f, z_b). \quad (9.2)$$

Le signal qui nous intéresse est $C_\ell^{g\kappa}(z_f, z_b)$, mais l'on voit que la corrélation amplification-convergence $C_\ell^{\mu\kappa}(z_f, z_b)$ vient y apporter une correction.

²Nous renvoyons le lecteur à la partie sur l'effet de lentille de la Section 8.3.3 pour plus de détails sur les observables liées à l'effet de lentille gravitationnelle.

Le même phénomène se produit pour les corrélations galaxies-amplification, pour lesquelles on considère la fonction de corrélation

$$w_{nn}(\theta, z_f, z_b) = w_{gg}(\theta, z_f, z_b) + w_{g\mu}(\theta, z_f, z_b) + w_{\mu g}(\theta, z_f, z_b) + w_{\mu\mu}(\theta, z_f, z_b) . \quad (9.3)$$

Si les galaxies d'arrière et d'avant-plan sont bien séparées, il est facile de voir que les corrélations $w_{gg}(\theta, z_f, z_b)$ et $w_{\mu g}(\theta, z_f, z_b)$ sont négligeables, ce qui permet de simplifier l'expression ci-dessus en

$$w_{nn}(\theta, z_f, z_b) = w_{g\mu}(\theta, z_f, z_b) + w_{\mu\mu}(\theta, z_f, z_b) , \quad (9.4)$$

ou d'une façon équivalente, dans l'espace des multipôles :

$$C_\ell^{n\mu}(z_f, z_b) = C_\ell^{g\mu}(z_f, z_b) + C_\ell^{\mu\mu}(z_f, z_b) . \quad (9.5)$$

Là encore, le signal $C_\ell^{g\mu}(z_f, z_b)$ est altéré par un terme provenant du biais d'amplification des galaxies d'avant-plan. Nous donnons les expressions détaillées de ces différents spectres de puissance angulaire dans la Partie II de notre article [297].

Les corrections $C_\ell^{\mu\kappa}(z_f, z_b)$ et $C_\ell^{\mu\mu}(z_f, z_b)$ aux signaux galaxies-lentilles $C_\ell^{g\kappa}(z_f, z_b)$ et $C_\ell^{g\mu}(z_f, z_b)$ sont dues à la présence de matière noire entre les galaxies d'avant-plan et l'observateur (il s'agit de la masse entourée en rouge sur la figure 9.2). Cette masse crée un effet

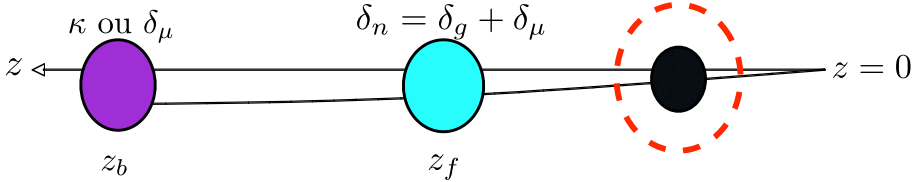


FIG. 9.2 – Schéma similaire à celui de la figure 9.1 à l'exception de la masse située entre l'avant-plan et l'observateur, qui est représentée (en noir, entourée de pointillés rouges) en plus des galaxies d'avant- et d'arrière-plan.

de lentille, à la fois sur les galaxies d'arrière-plan (contribuant ainsi à la convergence dans le cas des corrélations galaxies-galaxies et au biais d'amplification $\delta_\mu(z_b)$ dans le cas des corrélations galaxies-amplification) et sur les galaxies d'avant-plan (biais d'amplification δ_μ).

Tant que cette masse est faible – ce qui est le cas lorsque $z_f \lesssim 0.3$ – la correction due au biais d'amplification de l'avant-plan est négligeable. C'est ce qui est habituellement supposé dans la littérature. Cependant, lorsque le redshift de l'avant-plan est grand, l'effet du biais d'amplification de l'avant-plan peut devenir important. Nous montrons ainsi dans la Partie III de l'article [297] que, dans le cadre du modèle Λ CDM et pour le multipôle $\ell = 1000$, la correction est plus grande que $1\% \times (5s_f - 2)/b_f$ pour $z_f \gtrsim 0.37$, et au-dessus de $5\% \times (5s_f - 2)/b_f$ pour $z_f \gtrsim 0.67$. Dans ces estimations, nous avons noté b_f le biais des galaxies de l'avant-plan et s_f la pente du nombre de galaxies de l'avant-plan par unité de

magnitude (cf. Eq. (8.47)). Il n'est donc pas *a priori* possible de négliger ces corrections ; pour chaque observation, il est au contraire nécessaire, soit de s'assurer qu'elles sont en effet négligeables pour des raisons spécifiques au cas considéré (cela peut être le cas si $5s_f - 2 \simeq 0$ ou si le redshift z_f de l'avant-plan est faible), soit en tenir compte lors de l'interprétation des données expérimentales.

Dans la partie IV de l'article [297], nous étudions les conséquences de ces corrections dans le cadre des méthodes géométriques que nous avons présentées à la Section 8.3.5. Ainsi, nous montrons que si l'on suppose que $(5s_f - 2)/b_f = 1$, le redshift d'avant-plan z_f doit être limité à $z_f \lesssim 0.45$ si l'on veut éviter une erreur de plus de 5% sur l'équation d'état de l'énergie noire w_{de} . Même pour de plus petits redshifts (< 0.45), il est important que l'arrière-plan soit très nettement séparé de l'avant-plan pour être sûr que ces corrections restent négligeables.

9.2 Magnification Bias Corrections to Galaxy-Lensing Cross-Correlations (article)

Nous reproduisons à présent l'article [297] publié en 2008 par L. Hui et moi-même (RZ) dans le journal *Physical Review D* sous la référence “Phys.Rev.D **78** (2008) 123517” et intitulé “*Magnification Bias Corrections to Galaxy-Lensing Cross-Correlations*”.

PHYSICAL REVIEW D **78**, 123517 (2008)**Magnification bias corrections to galaxy-lensing cross-correlations**Riad Ziour^{1,*} and Lam Hui^{2,3,†}¹Laboratoire APC, UMR7164 (Université Paris 7, CNRS, CEA, Observatoire de Paris), 10 rue A. Domon et L. Duquet, 75205 Paris Cedex 13, France²Institute for Strings, Cosmology and Astroparticle Physics (ISCAP), Columbia University, New York, New York 10027, USA³Department of Physics, Columbia University, New York, New York 10027, USA

(Received 19 September 2008; published 15 December 2008)

Galaxy-galaxy or galaxy-quasar lensing can provide important information on the mass distribution in the Universe. It consists of correlating the lensing signal (either shear or magnification) of a background galaxy/quasar sample with the number density of a foreground galaxy sample. However, the foreground galaxy density is inevitably altered by the magnification bias due to the mass between the foreground and the observer, leading to a correction to the observed galaxy-lensing signal. The aim of this paper is to quantify this correction. The single most important determining factor is the foreground redshift z_f : the correction is small if the foreground galaxies are at low redshifts but can become non-negligible for sufficiently high redshifts. For instance, we find that for the multipole $\ell = 1000$, the correction is above $1\% \times (5s_f - 2)/b_f$ for $z_f \gtrsim 0.37$, and above $5\% \times (5s_f - 2)/b_f$ for $z_f \gtrsim 0.67$, where s_f is the number count slope of the foreground sample and b_f its galaxy bias. These considerations are particularly important for geometrical measures, such as the Jain and Taylor ratio or its generalization by Zhang *et al.* Assuming $(5s_f - 2)/b_f = 1$, we find that the foreground redshift should be limited to $z_f \lesssim 0.45$ in order to avoid biasing the inferred dark energy equation of state w by more than 5%, and that even for a low foreground redshift (< 0.45), the background samples must be well separated from the foreground to avoid incurring a bias of similar magnitude. Lastly, we briefly comment on the possibility of obtaining these geometrical measures without using galaxy shapes, using instead magnification bias itself.

DOI: 10.1103/PhysRevD.78.123517

PACS numbers: 98.80.Es, 95.35.+d, 98.65.Dx

I. INTRODUCTION

The gravitational lensing of distant objects such as galaxies or quasars [1] located around a redshift z_b consists of both shear (a change in shape) and magnification (a change in size and flux), and is due to the integrated mass along the line of sight (LOS) between these background galaxies and the observer. Correlating this lensing signal (either shear or magnification) with the foreground galaxy number density at $z_f < z_b$, we pick up the only part of the lensing mass which is correlated with the galaxy density at z_f , i.e. the matter located around z_f . Galaxy-lensing correlations are therefore very interesting tools to study the matter distribution around the lenses. These correlations have been observed experimentally and studied theoretically both in the case of galaxy-shear correlation (also often called galaxy-galaxy correlations) [2–9] and galaxy-magnification correlation [10–25]. In addition to providing information on the matter distribution, galaxy-lensing cross-correlations can be combined in order to build quantities which depend only on geometrical distances to the background and foreground samples, allowing measurements of dark energy (DE) parameters independently of the exact expression of the matter power spectrum. These methods, that we call *geometrical meth-*

ods, have been presented in [26–28] in the case of galaxy-shear correlations and in a more general way in [29] for both galaxy-shear and shear-shear correlations.

In this article, we would like to draw attention to the fact that these galaxy-lensing correlations depend crucially on estimates of the foreground galaxy density, which is inevitably altered by magnification bias, leading potentially to a systematic source of error. Magnification bias is a well-known effect (a derivation can be found in [30]). Corrections due to magnification bias caused by the presence of the mass along the LOS between z_f and $z = 0$ enter as follows. Suppose there is a mass overdensity along the LOS. On the one hand, the observed number of galaxies per unit area on the sky is smaller due to the stretching of the apparent intergalaxy spacing; on the other hand, very faint galaxies which were under the threshold of detectability are now visible, leading to a higher number density. The net effect depends on the number count slope s_f and it leads to a correction term being added to the intrinsic galaxy density

$$\delta_n = \delta_g + \delta_\mu, \quad (1)$$

where $\delta_\mu \propto (5s_f - 2)$. As a consequence, the galaxy-lensing cross-correlation gets an extra term due to the correlation between the lensing signal of the background galaxies and the extra foreground galaxy density δ_μ . How important this effect is, and under what condition this should be taken into account, is addressed as follows.

*ziour@apc.univ-paris7.fr

†lhui@astro.columbia.edu

RIAD ZIOUR AND LAM HUI

PHYSICAL REVIEW D **78**, 123517 (2008)

In Sec. II, we present the expressions for the magnification bias and for the galaxy-lensing correlations, including both galaxy-shear and galaxy-magnification correlations [31]. Then, we study in Sec. III how the correction due to magnification bias depends on various parameters in the problem: the background redshift z_b , the foreground redshift z_f , the angular scale, the selection function width σ , the number count slope s_f , and the galaxy bias b_f . In Sec. IV, we point out that magnification bias corrections are particularly important for the geometrical methods of [26,29]. We discuss strategies for minimizing them. We also suggest a simple extension of these geometrical methods which uses magnification bias itself, without the need for any galaxy shape information. We conclude in Sec. V. One recurring theme that would come up in our discussion is that the foreground redshift z_f is an important determining factor in the size of the magnification bias corrections. This is not only because a larger z_f makes for a larger lensing efficiency, it is also because a larger z_f generally means intrinsically brighter galaxies and therefore steeper number count slope s_f . The latter is particularly true if precise (i.e. spectroscopic) redshifts are necessary for the foreground galaxies, such as in some versions of the geometrical methods.

II. FORMALISM AND CORRELATION FUNCTIONS

A. Magnification bias

When magnification bias is taken into account, the observed galaxy overdensity at a mean redshift z_0 in the direction θ is

$$\delta_n(\theta, z_0) = \delta_g(\theta, z_0) + \delta_\mu(\theta, z_0). \quad (2)$$

The first term is the intrinsic galaxy fluctuation integrated over a normalized window function $W(z, z_0)$ and is given by

$$\delta_g(\theta, z_0) = \int_0^\infty dz W(z, z_0) b(z) \delta[\chi(z)\theta, z], \quad (3)$$

where $\chi(z)$ is the comoving distance to redshift z and $\delta = (\rho - \bar{\rho})/\bar{\rho}$ is the matter overdensity. We consider here the case of a flat universe, but the expression can be easily generalized to an open or closed universe. We assume a scale independent bias such that $\delta_g = b(z)\delta$; this should be correct for $k \lesssim 0.05h \text{ Mpc}^{-1}$, though corrections could become important at smaller scale (see e.g. [32]). If the bias b varies slowly across the width of the selection function W , we can further assume that the bias is constant through the galaxy sample, allowing the simplification

$$\delta_g(\theta, z_0) = b(z_0) \int_0^\infty dz W(z, z_0) \delta[\chi(z)\theta, z]; \quad (4)$$

we will assume the relation holds in this paper, although it

is straightforward to generalize our results to encompass both scale dependent and rapidly evolving bias.

The second term of Eq. (2) encodes the overdensity due to magnification bias, and it reads (assuming that $s(z)$ is slowly varying across $W(z, z_0)$):

$$\delta_\mu(\theta, z_0) = (5s(z_0) - 2) \times \int_0^\infty dz \frac{c}{H(z)} g(z, z_0) \nabla_\perp^2 \phi[\chi(z)\theta, z], \quad (5)$$

where $\nabla_\perp^2 \phi$ is the 2D Laplacian of the gravitational potential in the plane perpendicular to the line of sight and s is the slope of the number count function (see e.g. [30]). For a survey with limiting magnitude m this is

$$s = \frac{d \log_{10} N(<m)}{dm}. \quad (6)$$

We have also introduced the lensing weight function

$$g(z, z_0) = \chi(z) \int_z^\infty dz' \frac{\chi(z') - \chi(z)}{\chi(z')} W(z', z_0) \quad (7)$$

that can be thought of as proportional to the probability for a source around z_0 to be lensed by mass at redshift z ; it is peaked at a redshift corresponding roughly to half the comoving distance to the source (for a review of weak lensing, see e.g. [33]).

If we make use of the Poisson's equation, Eq. (5) becomes

$$\delta_\mu(\theta, z_0) = \left(\frac{3}{2} \frac{H_0^2}{c^2} \Omega_{m,0} \right) (5s(z_0) - 2) \int_0^\infty dz \frac{c}{H(z)} g(z, z_0) \times (1 + z) \delta[\chi(z)\theta, z]. \quad (8)$$

B. Cross-correlations

1. Galaxy-shear correlations

Galaxy-shear correlation (also often called galaxy-galaxy lensing) has been the object of considerable interest from theoretical and observational points of view [2–9]. It consists of correlating the cosmic shear of background galaxies located around a redshift z_b with the number density of foreground galaxies at redshift z_f . Here, we focus on the electric-component of the shear (sometimes called the scalar component or the gradient mode) and we will use κ to refer to this scalar part: the convergence. The cosmic shear of the sources is due to all the mass between z_b and $z = 0$; however correlating this shear with galaxy number density at z_f , we extract the part of the lensing mass that is correlated with the galaxy density at z_f , i.e. the matter located around z_f . Therefore, galaxy-shear correlations allow us to get important information about the galaxy-mass power spectrum.

More precisely, due to magnification bias, the galaxy-shear two-point correlation function is the sum of two terms

MAGNIFICATION BIAS CORRECTIONS TO GALAXY- ...

PHYSICAL REVIEW D **78**, 123517 (2008)

$$\begin{aligned}
w_{n\kappa}(\theta, z_f, z_b) &\equiv \langle \delta_n(\theta, z_f) \kappa(\theta', z_b) \rangle \\
&= \langle \delta_g(\theta, z_f) \kappa(\theta', z_b) \rangle \\
&\quad + \langle \delta_\mu(\theta, z_f) \kappa(\theta', z_b) \rangle \\
&= w_{g\kappa}(\theta, z_f, z_b) + w_{\mu\kappa}(\theta, z_f, z_b), \quad (9)
\end{aligned}$$

where $\cos\theta = \theta \cdot \theta'$. We then consider the Legendre coefficients $C_\ell^{g\kappa}(z_f, z_b)$, $C_\ell^{\mu\kappa}(z_f, z_b)$ of the correlation functions. They are defined as

$$w_{g\kappa}(\theta, z_f, z_b) = \sum_\ell \frac{2\ell+1}{4\pi} C_\ell^{g\kappa}(z_f, z_b) P_\ell(\cos\theta), \quad (10)$$

where the P_ℓ are the Legendre polynomials. The galaxy-shear angular power spectrum will then also be the sum of two terms,

$$C_\ell^{n\kappa}(z_f, z_b) = C_\ell^{g\kappa}(z_f, z_b) + C_\ell^{\mu\kappa}(z_f, z_b). \quad (11)$$

We calculate these two angular power spectra $C_\ell^{g\kappa}$, $C_\ell^{\mu\kappa}$ using the Limber approximation which is accurate for large multipoles $\ell \gtrsim 10$ [34]:

$$\begin{aligned}
C_\ell^{g\kappa}(z_f, z_b) &= \left(\frac{3}{2} \frac{H_0^2}{c^2} \Omega_{m,0} \right) b_f \int_0^\infty dz \frac{W(z, z_f) g(z, z_b)}{\chi^2(z)} \\
&\quad \times (1+z) P(\ell/\chi(z), z), \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_\ell^{\mu\kappa}(z_f, z_b) &= \left(\frac{3}{2} \frac{H_0^2}{c^2} \Omega_{m,0} \right)^2 (5s_f - 2) \int_0^\infty dz \frac{c}{H(z)} \\
&\quad \times \frac{g(z, z_f) g(z, z_b)}{\chi^2(z)} (1+z)^2 P(\ell/\chi(z), z), \quad (13)
\end{aligned}$$

where $P(k, z)$ is the 3D matter power spectrum for a wave number k and at a redshift z , b_f the intrinsic clustering bias of the foreground galaxy, and s_f the mean number count slope of the foreground galaxy sample. Usually, the signal we are interested in is $C_\ell^{g\kappa}$, while $C_\ell^{\mu\kappa}$ will constitute the magnification bias induced correction to this signal. It is then important to know to what extent this correction can be neglected or should be taken into account. We will discuss these issues in detail in the following sections, but before doing so, we would like to emphasize that the same sort of corrections exist for galaxy-magnification cross-correlations.

2. Galaxy-magnification correlations

Galaxy-magnification cross-correlation [10–25] is very similar to galaxy-shear correlation replacing the shear by the magnification of the background galaxies. In order to measure these correlations, one should correlate the galaxy density of a background distribution with the density of a foreground distribution leading to the correlation function

$$\begin{aligned}
w_{nn}(\theta, z_f, z_b) &= w_{gg}(\theta, z_f, z_b) + w_{g\mu}(\theta, z_f, z_b) \\
&\quad + w_{\mu g}(\theta, z_f, z_b) + w_{\mu\mu}(\theta, z_f, z_b). \quad (14)
\end{aligned}$$

If the background and foreground distributions do not overlap, and they are far apart, it is easy to see that the intrinsic galaxy-galaxy correlation $w_{gg}(\theta, z_f, z_b)$ and the correlation between the magnification of foreground galaxies and background galaxy density $w_{\mu g}(\theta, z_f, z_b)$ both vanish. The two remaining terms

$$w_{nn}(\theta, z_f, z_b) = w_{g\mu}(\theta, z_f, z_b) + w_{\mu\mu}(\theta, z_f, z_b) \quad (15)$$

are comparable to Eq. (9).

Similarly to $C_\ell^{n\kappa}$, the angular power spectrum will be the sum of two terms

$$C_\ell^{n\mu}(z_f, z_b) = C_\ell^{g\mu}(z_f, z_b) + C_\ell^{\mu\mu}(z_f, z_b), \quad (16)$$

where

$$\begin{aligned}
C_\ell^{g\mu}(z_f, z_b) &= \left(\frac{3}{2} \frac{H_0^2}{c^2} \Omega_{m,0} \right) b_f (5s_b - 2) \\
&\quad \times \int_0^\infty dz \frac{W(z, z_f) g(z, z_b)}{\chi^2(z)} \\
&\quad \times (1+z) P(\ell/\chi(z), z), \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_\ell^{\mu\mu}(z_f, z_b) &= \left(\frac{3}{2} \frac{H_0^2}{c^2} \Omega_{m,0} \right)^2 (5s_f - 2)(5s_b - 2) \\
&\quad \times \int_0^\infty dz \frac{c}{H(z)} \frac{g(z, z_f) g(z, z_b)}{\chi^2(z)} \\
&\quad \times (1+z)^2 P(\ell/\chi(z), z). \quad (18)
\end{aligned}$$

We can see that these expressions depend strongly on the galaxy samples, through the bias b_f and the number count slopes s_f , s_b . Here, $C_\ell^{\mu\mu}$ constitutes the magnification bias correction to $C_\ell^{g\mu}$, the quantity that observers hope to measure by cross-correlating number counts of two widely separated samples of galaxies.

3. Formalism that combines the two types of correlations

If we compare Eqs. (12), (13), (17), and (18), it is easy to see that they have a similar structure. To give a unifying treatment, let us introduce the matter-convergence and convergence-convergence power spectra

$$\begin{aligned}
C_\ell^{\delta\kappa}(z_f, z_b) &= \left(\frac{3}{2} \frac{H_0^2}{c^2} \Omega_{m,0} \right) \int_0^\infty dz \frac{W(z, z_f) g(z, z_b)}{\chi^2(z)} \\
&\quad \times (1+z) P(\ell/\chi(z), z), \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_\ell^{\kappa\kappa}(z_f, z_b) &= \left(\frac{3}{2} \frac{H_0^2}{c^2} \Omega_{m,0} \right)^2 \int_0^\infty dz \frac{c}{H(z)} \frac{g(z, z_f) g(z, z_b)}{\chi^2(z)} \\
&\quad \times (1+z)^2 P(\ell/\chi(z), z); \quad (20)
\end{aligned}$$

then, we can relate the different power spectra in the following way:

$$C_\ell^{g\kappa}(z_f, z_b) = b_f C_\ell^{\delta\kappa}(z_f, z_b), \quad (21)$$

RIAD ZIOUR AND LAM HUI

PHYSICAL REVIEW D **78**, 123517 (2008)

$$C_{\ell}^{\mu\kappa}(z_f, z_b) = (5s_f - 2)C_{\ell}^{\kappa\kappa}(z_f, z_b) \quad (22)$$

and

$$C_{\ell}^{g\mu}(z_f, z_b) = (5s_b - 2)b_f C_{\ell}^{\delta\kappa}(z_f, z_b), \quad (23)$$

$$C_{\ell}^{\mu\mu}(z_f, z_b) = (5s_b - 2)(5s_f - 2)C_{\ell}^{\kappa\kappa}(z_f, z_b). \quad (24)$$

We are interested in the fractional magnification corrections to the observed galaxy-lensing correlations, and in both the galaxy-shear correlation and the galaxy-magnification correlation, that ratio is

$$\frac{C_{\ell}^{\mu\kappa}(z_f, z_b)}{C_{\ell}^{g\kappa}(z_f, z_b)} = \frac{C_{\ell}^{\mu\mu}(z_f, z_b)}{C_{\ell}^{g\mu}(z_f, z_b)} = \frac{(5s_f - 2)}{b_f} r(z_f, z_b; \ell) \quad (25)$$

where r is defined as

$$r(z_f, z_b; \ell) \equiv \frac{C_{\ell}^{\kappa\kappa}(z_f, z_b)}{C_{\ell}^{\delta\kappa}(z_f, z_b)}. \quad (26)$$

In what follows, we will display several figures showing r , but it should be kept in mind that ultimately, the fractional correction of interest is r multiplied by $(5s_f - 2)/b_f$, a quantity which is sample dependent. It suffices to say that for vast classes of galaxy samples, this factor of $(5s_f - 2)/b_f$ could be easily of order unity. We will discuss this point in detail in Sec. III D.

In all illustrative examples below, we will consider for simplicity a Gaussian selection function of width σ

$$W(z, z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(z - z_0)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (27)$$

and the following cosmological parameters: the Hubble constant $h = 0.7$, matter density $\Omega_m = 0.27$, cosmological constant $\Omega_{\Lambda} = 0.73$, baryon density $\Omega_b = 0.046$, power spectrum slope $n = 0.95$, and normalization $\sigma_8 = 0.8$. We employ the transfer function of [35] and the prescription of [36] for the nonlinear power spectrum.

III. CORRECTION DUE TO MAGNIFICATION BIAS

We would like to understand better to what extent the correction due to magnification bias should be taken into account, and if so, in what cases. Before going into details, we would like to emphasize that the correction to $C_{\ell}^{\delta\kappa}$ due to $C_{\ell}^{\kappa\kappa}$ can be *non-negligible*; in Fig. 1 we plotted the correlation “signal” $C_{\ell}^{\delta\kappa}(z_f, z_b)$ along with the corrected observable $C_{\ell}^{\delta\kappa}(z_f, z_b) + C_{\ell}^{\kappa\kappa}(z_f, z_b)$ for two foreground and background redshifts. We see that the correction is very small for low foreground redshifts, but this is not the case for a higher z_f .

In the following, we will study in detail the ratio in Eq. (25), or its cousin r in Eq. (26), and their dependence on the different parameters.

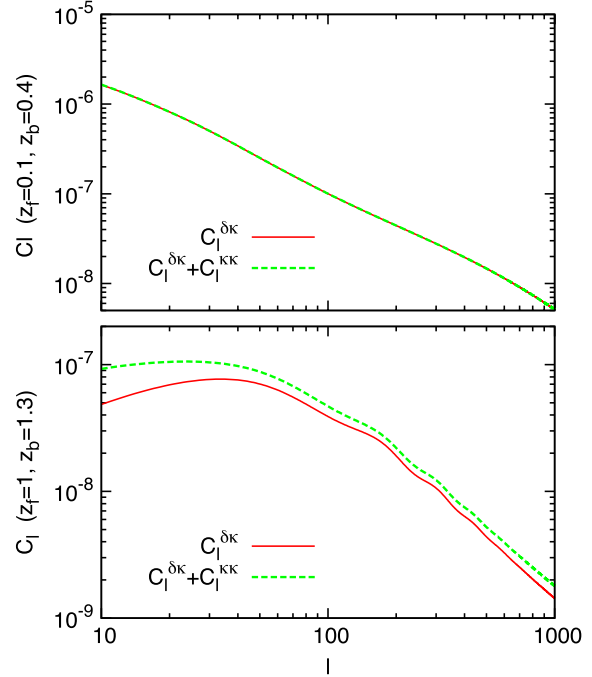


FIG. 1 (color online). Galaxy-lensing power spectrum $C_{\ell}^{\delta\kappa}(z_f, z_b)$ and the corrected power spectrum $C_{\ell}^{\delta\kappa}(z_f, z_b) + C_{\ell}^{\kappa\kappa}(z_f, z_b)$ for two redshift configurations. The redshift width of the selection function is $\sigma = 0.07$.

A. Dependence on the background galaxies redshift z_b

The ratio r depends on z_b through the lensing weight function g . In Fig. 2, we can see that r grows when the background sample gets closer to the foreground galaxies. This is easy to understand: the galaxy-lensing correlation, which is proportional to $C_{\ell}^{\delta\kappa}$, becomes small when the source-lens separation becomes small. More quantitatively, if one approximates the selection function by a delta function, i.e. $W(z, z_f) \approx \delta(z - z_f)$ (which is a reasonable approximation if the width σ of the selection functions is small and if the sources and lenses distributions do not overlap), we have

$$C_{\ell}^{\delta\kappa}(z_f, z_b) \approx \left(\frac{3}{2} \frac{H_0^2}{c^2} \Omega_{m,0}\right) \frac{\chi(z_b) - \chi(z_f)}{\chi(z_f)\chi(z_b)} \times (1 + z_f) P(\ell/\chi(z_f), z_f), \quad (28)$$

showing that $C_{\ell}^{\delta\kappa}$ goes to zero for close background and foreground samples; this is due to the fact that when the lenses are very close to the sources, the lensing weight function g is almost null (it would exactly vanish if indeed W were a perfect delta function). Under the same approximation, we have

MAGNIFICATION BIAS CORRECTIONS TO GALAXY- ...

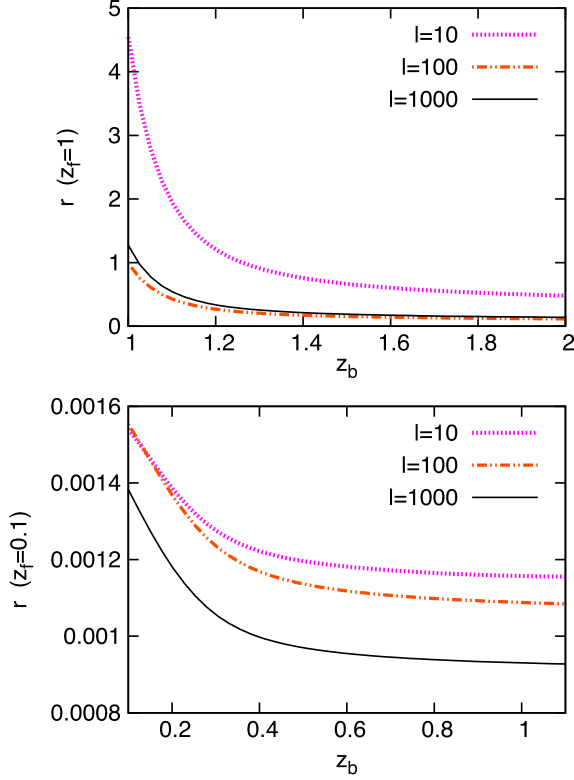
PHYSICAL REVIEW D **78**, 123517 (2008)

FIG. 2 (color online). $r(z_f, z_b; \ell) = C_\ell^{\kappa\kappa}(z_f, z_b)/C_\ell^{\delta\kappa}(z_f, z_b)$ for two different fixed foreground redshifts $z_f = 0.1, 1$ and for three values of $\ell = 10, 100, 1000$. The width of the selection function is $\sigma = 0.07$. For each z_f we let z_b vary in $[z_f, z_f + 1]$. We can see that the ratio r decreases with the separation between the background and foreground samples.

$$C_\ell^{\kappa\kappa}(z_f, z_b) \approx \left(\frac{3}{2} \frac{H_0^2}{c^2} \Omega_{m,0}\right)^2 \int_0^{z_f} dz \frac{c}{H(z)} (1+z)^2 \times \frac{\chi(z_f) - \chi(z)}{\chi(z_f)} \frac{\chi(z_b) - \chi(z)}{\chi(z_b)} P(\ell/\chi(z), z), \quad (29)$$

which tends toward a finite value when $z_b \rightarrow z_f$. It is therefore not surprising to see that the ratio r becomes large when the background galaxy redshift approaches that of the foreground. Of course, for realistic observations, the selection function is never quite a delta function, and the precise behavior at low background redshift will depend on its precise shape. We will study that aspect in more detail in Sec. III C (see also [37]). Note also that when z_b approaches z_f , the whole premise of galaxy-magnification cross-correlation measurements breaks down: as described in Sec. II B 2, the idea of such measurements is to correlate the number counts of a foreground sample and a back-

ground sample which are sufficiently far apart so that the intrinsic clustering term w_{gg} is unimportant.

Another interesting feature of Fig. 2 is that for high z_b , r asymptotes to some minimal value (independent of the background position). This can also be understood easily through Eqs. (28) and (29), indeed, when $\chi(z_f) \ll \chi(z_b)$, $\chi(z_b)$ cancels out of Eq. (28) while Eq. (29) becomes weakly dependent on $\chi(z_b)$. Therefore, if one's goal is to minimize (magnification bias induced) corrections to the galaxy-lensing correlations, it is important to make sure the sources and the lenses are widely separated. However, it is worth noting that according to Fig. 2, r can still be fairly substantial even when z_b differs significantly from z_f . This holds especially if z_f is sufficiently large. We will explore this further next.

B. Dependence on the foreground galaxies redshift z_f

The foreground redshift appears to be the crucial parameter which determines when the correction to $C_\ell^{\delta\kappa}$ due to $C_\ell^{\kappa\kappa}$ is large. Indeed, the correlation $C_\ell^{\kappa\kappa}$ comes from the lensing of both background and foreground galaxies by the mass located between z_f and $z = 0$. The lensing efficiency associated with this mass increases as z_f increases. This effect is already visible in Fig. 2, but is even more striking in Fig. 3 in which we plot r as a function of z_f (for each point, we choose $z_b = z_f + 1$ so that r is close to its asymptotic minimum value for this z_f). Obviously, the curves for low multipoles have a very different behavior from the curves for high multipoles (we will study in more detail this dependence on ℓ below). However, the main point is that for each multipole ℓ , r grows with z_f and reaches a non-negligible value for high z_f . For example, for $\ell = 1000$, $r = C_\ell^{\kappa\kappa}/C_\ell^{\delta\kappa}$ is above 1% as soon as $z_f \gtrsim 0.37$, and above 5% for $z_f \gtrsim 0.67$. As a consequence, magnification bias correction should be taken into account when interpreting galaxy-lensing correlation measurements if the foreground redshift is sufficiently high.

This dependence on the foreground redshift z_f also allows us to infer that this correction is negligible for the cross-correlations that have been observed until now. Indeed, in the case of the recently observed galaxy-shear correlations (or so called galaxy-galaxy lensing) using the SDSS survey [2–5,8,9], the lenses (foreground) are mostly distributed [2] around a mean redshift $\langle z_f \rangle = 0.1$. It is safe to assume that these galaxies have $|5s_f - 2|/b_f$ of at best unity [2]. Therefore the fractional correction is small: $|C_\ell^{\mu\kappa}/C_\ell^{\delta\kappa}| \lesssim 1\%$. Similar conclusions hold in the case of galaxy-magnification correlations measured by cross-correlating foreground galaxy counts with background quasar counts, as carried out by [22]: here again, the distribution of the foreground galaxies is peaked around the low redshift $\langle z_f \rangle = 0.24$, leading to a less than 5% correction even for a large number count slope.

RIAD ZIOUR AND LAM HUI

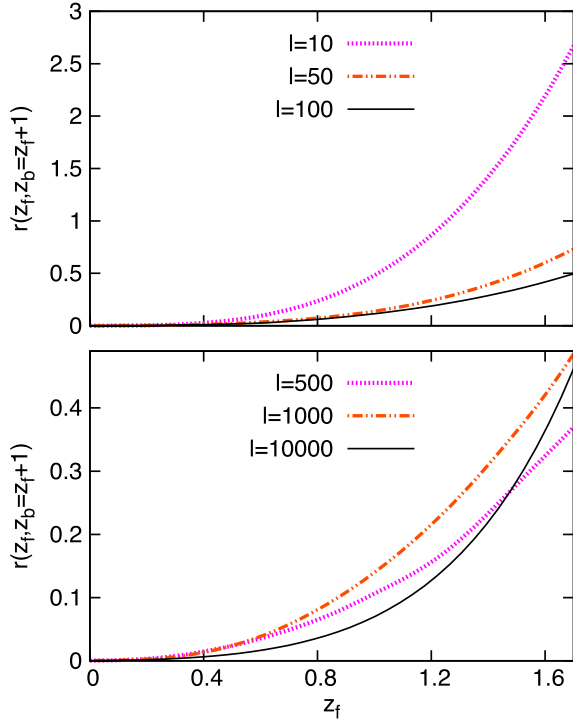


FIG. 3 (color online). Ratio $r(z_f, z_b; \ell)$ for different foreground redshifts z_f ; for each z_f , we choose a background redshift $z_b = z_f + 1$, such that according to Fig. 2, r is minimized. The redshift width of the selection function is $\sigma = 0.07$. On the top panel, low multipoles are shown, while the bottom plot shows r for high multipoles.

The situation will be quite different for future weak lensing surveys, like LSST [38] or DUNE (now EUCLID) [39]; indeed, these surveys will obtain precise photometric redshifts up to very high redshifts $z \sim 3$, and therefore the magnification bias correction will not be *a priori* negligible. In particular, for high lens redshift $z_f \gtrsim 1$, if the foreground number slope s_f is not such that the magnification is small, the correction can be of order one. To keep the magnification bias correction small, one can either focus on low z_f galaxies, or select samples where s_f is close to 0.4 (or weigh galaxies by $1/(5s_f - 2)$). Perhaps a better strategy is to include the magnification bias correction from the beginning when interpreting measurements.

C. Dependence on the multipole ℓ and the selection function width σ

As discussed above, the correction due to $C_\ell^{\kappa\kappa}$ depends on ℓ ; in Fig. 4, we plot r as a function of ℓ for $z_f = 1, z_b = 2$ in the case of nonlinear matter power spectrum (case 1); in order to emphasize the effect of nonlinearities, we also plot

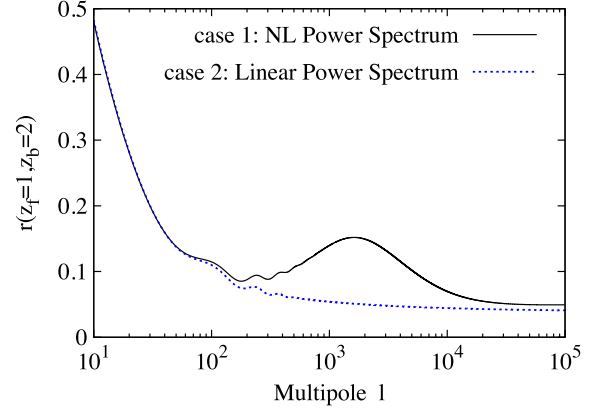
PHYSICAL REVIEW D **78**, 123517 (2008)

FIG. 4 (color online). Ratio $r(z_f, z_b; \ell) = C_\ell^{\kappa\kappa}(z_f, z_b) / C_\ell^{\delta\kappa}(z_f, z_b)$ as a function of the multipole ℓ for $z_f = 1, z_b = 2$ in two cases. *Case 1*: r is computed using a nonlinear matter power spectrum [36]; *Case 2*: r is computed assuming the matter power spectrum is equal to the linear one. For low ℓ , r decreases steeply, before reaching a roughly constant plateau for high ℓ .

$r(\ell)$ assuming the matter power spectrum is equal to the linear one (case 2). (All figures in the rest of this paper use the nonlinear power spectrum.)

We can see that r generally decreases with ℓ . We can also see a bump around $\ell \approx 1000$ in the nonlinear case. Since nonlinearities become important at different ℓ 's for $C_\ell^{\kappa\kappa}$ and $C_\ell^{\delta\kappa}$ (because the former is sensitive to fluctuations between redshift zero and z_f while the latter is sensitive to fluctuations at around z_f), it is not surprising that their ratio is not monotonic. At sufficiently high ℓ 's, the ratio r asymptotes to some low value.

The overall behavior of r can be understood as follows. Approximating once again the selection function as a delta function, we need only to consider the ratio of Eq. (29) to Eq. (28). At sufficiently high ℓ 's, the integral over z in Eq. (29) is such that it is dominated by z 's where $P(\ell/\chi(z), z)$ is more or less power-law in ℓ , i.e. $P \propto \ell^{-3}$ (originating from the fact that $P(k) \propto k^{-3}$ at high k 's). Equation (28) is likewise roughly proportional to ℓ^{-3} for sufficiently high ℓ 's. Their ratio r is therefore independent of ℓ , giving rise to the high ℓ asymptote that we see in Fig. 4. At low ℓ 's, on the other hand, the integral in Eq. (29) goes through the maximum of the matter power spectrum, and the result depends strongly on ℓ , leading to the steep decreasing slope for low ℓ noticed in Fig. 4.

We should emphasize that at high ℓ 's ($\gtrsim 10^3$), the actual ratios of interest $C_\ell^{\kappa\kappa}/C_\ell^{\mu\kappa}$ and $C_\ell^{\delta\mu}/C_\ell^{\mu\mu}$ [Eqs. (12), (13), (17), and (18)], are affected by nonlinear and scale dependent galaxy bias.

In this paper, we are mostly interested in the cases where the foreground and background distributions do not overlap, and for which the width σ of the selection function is of little importance, as long as it is small (the case where

MAGNIFICATION BIAS CORRECTIONS TO GALAXY- ...

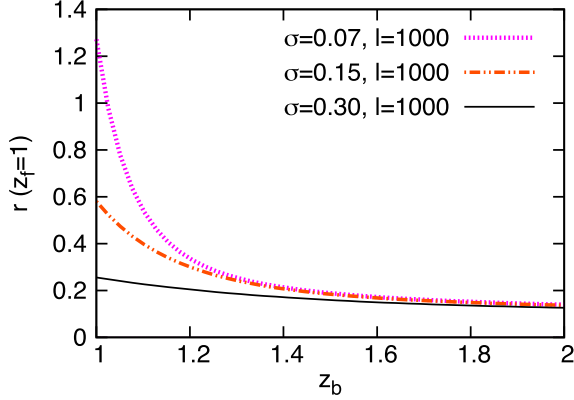


FIG. 5 (color online). $r(z_f, z_b; \ell) = C_\ell^{\kappa\kappa}(z_f, z_b)/C_\ell^{\delta\kappa}(z_f, z_b)$ as a function of z_b for $z_f = 1$ and $\ell = 1000$; three different widths of the selection function are shown: $\sigma = 0.07, 0.15, 0.30$. For background redshifts close to foreground ones, r depends strongly on σ , decreasing as σ increases; for high $z_b \gtrsim z_f + 3\sigma$, the width of the selection function has no influence anymore, as expected from the delta function approximation.

the foreground and background galaxies are at the same redshift has been studied extensively in [37]). This is confirmed by Fig. 5, where we see that as long as the separation between foreground and background is large compared to σ , the precise value of σ does not matter much. In cases where z_b is actually close to z_f , the main effect of increasing σ is to make $C_\ell^{\delta\kappa}$ larger, hence making the ratio r smaller (recall that $C_\ell^{\delta\kappa}$ vanishes if the selection function is an exact delta function).

D. Dependence on the bias b_f and number count slope s_f

In the previous sections, we have studied the parameter dependence of the ratio $r = C_\ell^{\kappa\kappa}/C_\ell^{\delta\kappa}$. However, the quantity of observational interest is actually $\frac{(5s_f-2)}{b_f} r$ [Eq. (25)], which depends crucially on the lens sample dependent quantities $(5s_f - 2)$ and b_f . The ratio $(5s_f - 2)/b_f$ can vary anywhere from -1 to 2 depending on the sample limiting magnitude and redshift, and it generally increases as one focuses on brighter galaxies and higher redshifts (see Fig. 1 of [30]). It is worth noting that measurements that require spectroscopic redshifts (such as in the geometrical method proposed by [26], discussed below) focus on bright galaxies for which $(5s_f - 2)/b_f$ is generally large, i.e. order unity or above.

IV. GEOMETRICAL METHODS AND MAGNIFICATION BIAS

By “geometrical methods,” we refer to techniques that involve combining lensing measurements at different redshifts to obtain measures that are purely geometrical in

PHYSICAL REVIEW D **78**, 123517 (2008)

nature (i.e. they depend only on combinations of geometrical distances and not on the power spectrum or its growth). There are two simple observations we would like to make about these techniques. First, there is a simple way to implement these techniques using galaxy counts alone, without using any galaxy shape information. Second, magnification bias corrections may affect these measures in a significant way, or more precisely, affect significantly the inference of dark energy parameters from these measures.

A. Extensions using number counts

Jain and Taylor [26] (see also [27,28]) proposed using the ratio of galaxy-shear correlations (i.e. in a galaxy-galaxy lensing experiment, as described in Sec. II B 1) to constrain a certain combination of angular diameter distances:

$$R = \frac{C_\ell^{\kappa\kappa}(z_f, z_1)}{C_\ell^{\kappa\kappa}(z_f, z_2)} = \frac{(\chi(z_1) - \chi(z_f))\chi(z_2)}{(\chi(z_2) - \chi(z_f))\chi(z_1)}. \quad (30)$$

The second equality holds if the selection functions are sharply peaked; this places an especially high demand on the redshift accuracy of the foreground galaxies [28].

It is fairly straightforward to see that the same ratio can be obtained by galaxy-magnification correlation measurements, the type described in Sec. II B 2. In other words, by cross-correlating the number counts of a foreground sample and a background sample of galaxies, one can isolate $C_\ell^{\kappa\mu}$ [Eq. (17), temporarily ignoring the magnification bias correction that is in Eq. (18)]. If one can measure this cross-correlation using two different background samples but with the same foreground, we can form a ratio analogous to the Jain and Taylor ratio of Eq. (30):

$$R_{\text{new}} = \frac{C_\ell^{\kappa\mu}(z_f, z_1)}{C_\ell^{\kappa\mu}(z_f, z_2)} = \frac{(5s_1 - 2)(\chi(z_1) - \chi(z_f))\chi(z_2)}{(5s_2 - 2)(\chi(z_2) - \chi(z_f))\chi(z_1)}, \quad (31)$$

where the second equality holds again under the assumption of a sufficiently narrow selection function. This ratio differs from Eq. (30) only by factors that involve the number count slope which can be independently measured.

Similar logic applies to generalizations of the Jain and Taylor ratio, such as the one proposed by Zhang *et al.* [29]. It exploits what is known as an offset linear scaling of the galaxy-shear correlation (similar scaling applies to shear-shear correlation as well):

$$C_\ell^{\kappa\kappa}(z_f, z_b) = F_\ell(z_f) + G_\ell(z_f)/\chi_{\text{eff}}(z_b), \quad (32)$$

where

$$\frac{1}{\chi_{\text{eff}}(z_b)} = \int_0^\infty dz' \frac{W(z', z_b)}{\chi(z')} \quad (33)$$

and

RIAD ZIOUR AND LAM HUI

$$F_\ell(z_f) = \left(\frac{3}{2} \frac{H_0^2}{c^2} \Omega_{m,0}\right) b_f \int_0^\infty dz \frac{W(z, z_f)}{\chi(z)} \times (1+z) P(\ell/\chi(z), z), \quad (34)$$

$$G_\ell(z_f) = -\left(\frac{3}{2} \frac{H_0^2}{c^2} \Omega_{m,0}\right) b_f \int_0^\infty dz W(z, z_f) \times (1+z) P(\ell/\chi(z), z). \quad (35)$$

Zhang *et al.* [29] suggested combinations of C_ℓ^{gK} 's from different samples which are purely geometrical in nature, such as

$$R^Z \equiv \frac{C_\ell^{gK}(z_f, z_3) - C_\ell^{gK}(z_f, z_1)}{C_\ell^{gK}(z_f, z_2) - C_\ell^{gK}(z_f, z_1)} = \frac{\chi_{\text{eff}}(z_3)^{-1} - \chi_{\text{eff}}(z_1)^{-1}}{\chi_{\text{eff}}(z_2)^{-1} - \chi_{\text{eff}}(z_1)^{-1}}. \quad (36)$$

An advantage of this approach compared to [26] is that it is less demanding on the redshift accuracy.

Once again, one can implement the same idea using the cross-correlation of number counts alone, i.e. one can study instead:

$$R_{\text{new}}^Z \equiv \frac{C_\ell^{g\mu}(z_f, z_3)/(5s_3 - 2) - C_\ell^{g\mu}(z_f, z_1)/(5s_1 - 2)}{C_\ell^{g\mu}(z_f, z_2)/(5s_2 - 2) - C_\ell^{g\mu}(z_f, z_1)/(5s_1 - 2)} = \frac{\chi_{\text{eff}}(z_3)^{-1} - \chi_{\text{eff}}(z_1)^{-1}}{\chi_{\text{eff}}(z_2)^{-1} - \chi_{\text{eff}}(z_1)^{-1}}. \quad (37)$$

B. Magnification bias corrections

The methods described above are interesting because they allow us to isolate from cross-correlation measurements purely geometrical constraints on dark energy. Such constraints can be compared with constraints from the growth of structure as a consistency test of general relativity. Figure 6 shows the Jain and Taylor ratio R as a function of the dark energy equation of state w . We would like to draw attention to the fact that R is a weak function of w . This means an accurate determination of w would require a very precise measurement of R . For instance, in the configuration of Fig. 6, to constrain w to 5%, we would need to measure R to within $\sim 0.04\%$. This suggests the magnification bias corrections we have been studying might be especially relevant: their presence, if unaccounted for, would lead to incorrect inference on the dark energy equation of state.

More quantitatively, the *observed* Jain and Taylor ratio is

$$R_{\text{obs}} = \frac{C_\ell^{gK}(z_f, z_1) + C_\ell^{\mu K}(z_f, z_1)}{C_\ell^{gK}(z_f, z_2) + C_\ell^{\mu K}(z_f, z_2)} = \frac{C_\ell^{gK}(z_f, z_1)}{C_\ell^{gK}(z_f, z_2)} \left(\frac{1 + \frac{(5s_f - 2)}{b_f} r(z_f, z_1; \ell)}{1 + \frac{(5s_f - 2)}{b_f} r(z_f, z_2; \ell)} \right), \quad (38)$$

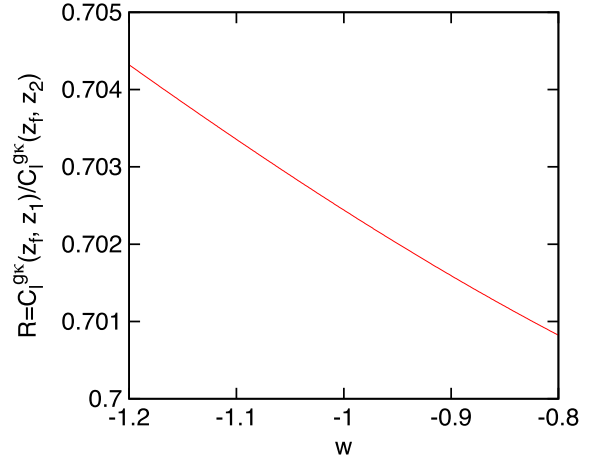
PHYSICAL REVIEW D **78**, 123517 (2008)

FIG. 6 (color online). Dependence of the ratio $R = C_\ell^{gK}(z_f, z_1)/C_\ell^{gK}(z_f, z_2)$ on the DE equation of state w for $z_f = 0.3$, $z_1 = 0.5$, $z_2 = 0.7$. Note that R is a weak function of w .

where z_f is the foreground redshift, and z_1 and z_2 are two different background redshifts. Inferring w from R_{obs} , without accounting for its difference from the idealized ratio R in Eq. (38) (i.e. using R as the model for the data), leads then to an inferred DE equation of state w_{inferred} which differs from the true one w_{true} ; we call $\Delta w = w_{\text{true}} - w_{\text{inferred}}$ the resulting bias. In Fig. 7, this bias Δw is shown for various redshift configurations and $\ell = 1000$. Here, we consider redshifts ranging up to $z = 2.6$, approximate the selection functions by delta functions, and assume

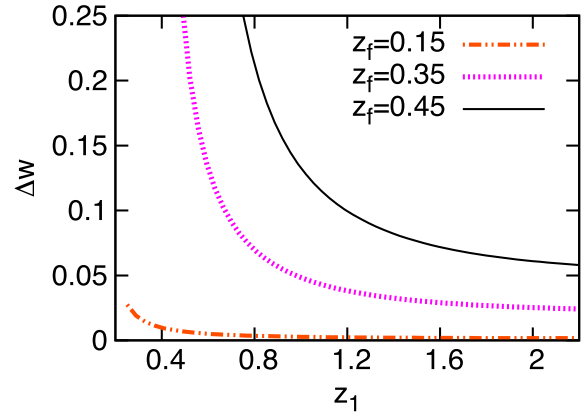


FIG. 7 (color online). Bias in the inferred dark energy equation of state Δw if magnification bias corrections are ignored in interpreting the Jain and Taylor ratio. This is as a function of the background redshift z_1 , for three foreground redshifts $z_f = 0.15, 0.35, 0.45$. For each z_1 , we fix the other background redshift $z_2 = z_1 + 0.4$ (our results do not depend sensitively on the choice of $z_2 - z_1$). The selection functions are approximated by delta functions, and $(5s_f - 2)/b_f \sim 1$ is assumed. The calculation is done for $\ell = 1000$.

MAGNIFICATION BIAS CORRECTIONS TO GALAXY- ...

$(5s_f - 2)/b_f \sim 1$. The approximation and assumption are reasonable given that the Jain and Taylor method requires essentially spectroscopic redshifts for the foreground galaxies: such galaxies are generally bright and their values for $(5s_f - 2)/b_f$ are typically large (see [30]). We find that for very low foreground redshifts ($z_f \lesssim 0.15$), the bias Δw is generally less than 5% for all combinations of the two background redshifts z_1 and z_2 . For intermediate redshifts $0.15 \lesssim z_f \lesssim 0.45$, whether one can keep Δw below 5% depends on the z_1, z_2 configuration: for low z_1, z_2 (i.e. approaching z_f), the magnification bias correction is simply too large to be ignored; for sufficiently high z_1, z_2 , $r(z_f, z_1; \ell)$ and $r(z_f, z_2; \ell)$ become close to each other, almost independent of the background redshifts (see Fig. 2) and so the magnification bias corrections cancel each other to a large extent in R_{obs} . Finally, for high foreground redshifts ($z_f \gtrsim 0.45$), the magnification bias corrections are simply too large to allow such delicate cancellations: Δw exceeds 5% for all background configurations.

One could of course, when interpreting data, account for the magnification bias corrections from the beginning and avoid such a bias Δw . Note, however, that these corrections depend on the power spectrum, making the observed ratio R_{obs} not strictly geometrical anymore. In other words, this ratio is a useful, pure geometrical measure only in so far as the magnification bias corrections are small.

V. CONCLUSION

In this paper, we present a detailed study of the correction due to the magnification bias of foreground galaxies in the context of galaxy-lensing cross-correlations. We find that the most important factor that determines the size of this correction is the foreground redshift: the size increases

PHYSICAL REVIEW D **78**, 123517 (2008)

with redshift. For example, we found that for $\ell = 1000$, the correction is above $1\% \times (5s_f - 2)/b_f$ for $z_f \gtrsim 0.37$, and above $5\% \times (5s_f - 2)/b_f$ for $z_f \gtrsim 0.67$. Maintaining a low foreground redshift is therefore necessary to keep the magnification bias correction small. (We find a sufficiently large separation between foreground and background, $\Delta z \sim 1$, is also necessary.) Or else, one should explicitly account for the magnification bias correction when interpreting data. This is especially true for future surveys which are expected to reach high precision and high redshifts. Finally, we present a simple extension of existing geometrical methods to measure dark energy parameters independently of the matter power spectrum. In the case of galaxy-shear [26,29] and shear-shear [29] correlation functions: the galaxy-shear correlation can be replaced by galaxy-magnification correlation, allowing measurements that involve only galaxy counts, with no galaxy shape information necessary. However, we also point out that these geometrical methods are generically sensitive to magnification bias corrections. For $(5s_f - 2)/b_f = 1$, we find that the foreground redshift should be limited to $z_f \lesssim 0.45$ in order to avoid biasing the inferred dark energy equation of state w by more than 5%, and that even for a low foreground redshift (< 0.45), the background samples must be well separated from the foreground to avoid incurring a bias of similar magnitude.

As this paper was nearing completion, we became aware of a preprint by Bernstein [40] that has some overlap with the magnification bias issues that we discuss here.

ACKNOWLEDGMENTS

Research for this work is supported in part by the DOE, Grant No. DE-FG02-92-ER40699, and the Initiatives in Science and Engineering Program at Columbia University.

-
- [1] In this article, we will use the term *galaxy* as a generic term for any survey object like actual galaxies or quasars.
 - [2] E. S. Sheldon *et al.* (SDSS Collaboration), *Astron. J.* **127**, 2544 (2004).
 - [3] E. S. Sheldon *et al.*, arXiv:0709.1153.
 - [4] D. E. Johnston *et al.*, arXiv:0709.1159.
 - [5] E. S. Sheldon *et al.*, arXiv:0709.1162.
 - [6] J. Guzik and U. Seljak, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **321**, 439 (2001).
 - [7] J. Guzik and U. Seljak, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **335**, 311 (2002).
 - [8] R. Mandelbaum *et al.*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **361**, 1287 (2005).
 - [9] R. Mandelbaum *et al.*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **372**, 758 (2006).
 - [10] J. E. Gunn, *Astrophys. J.* **147**, 61 (1967).
 - [11] E. L. Turner, J. P. Ostriker, I. Gott, and J. Richard, *Astrophys. J.* **284**, 1 (1984).
 - [12] R. L. Webster, P. C. Hewett, M. E. Harding, and G. A. Wegner, *Nature (London)* **336**, 358 (1988).
 - [13] W. Fugmann, *Astron. Astrophys.* **204**, 73 (1988).
 - [14] R. Narayan, *Astrophys. J.* **339**, L53 (1989).
 - [15] P. Schneider, *Astron. Astrophys.* **221**, 221 (1989).
 - [16] T. J. Broadhurst, A. N. Taylor, and J. A. Peacock, *Astrophys. J.* **438**, 49 (1995).
 - [17] J. V. Villumsen, arXiv:astro-ph/9512001.
 - [18] J. V. Villumsen, W. Freudling, and L. N. da Costa, *Astrophys. J.* **481**, 578 (1997).
 - [19] R. Moessner, B. Jain, and J. V. Villumsen, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **294**, 291 (1998).
 - [20] R. Moessner and B. Jain, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **294**, L18 (1998).
 - [21] E. Gaztanaga, *Astrophys. J.* **589**, 82 (2003).
 - [22] R. Scranton *et al.* (SDSS Collaboration), *Astrophys. J.*

RIAD ZIOUR AND LAM HUI

- 633**, 589 (2005).
- [23] B. Menard and M. Bartelmann, *Astron. Astrophys.* **386**, 784 (2002).
 - [24] B. Jain, R. Scranton, and R.K. Sheth, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **345**, 62 (2003).
 - [25] E. Gaztanaga, A. Cabre, and L. Hui, arXiv:0807.3551.
 - [26] B. Jain and A. Taylor, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 141302 (2003).
 - [27] A.N. Taylor, T.D. Kitching, D.J. Bacon, and A.F. Heavens, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **374**, 1377 (2007).
 - [28] G.M. Bernstein and B. Jain, *Astrophys. J.* **600**, 17 (2004).
 - [29] J. Zhang, L. Hui, and A. Stebbins, *Astrophys. J.* **635**, 806 (2005).
 - [30] L. Hui, E. Gaztanaga, and M. LoVerde, *Phys. Rev. D* **76**, 103502 (2007).
 - [31] A clarification on possibly confusing terminology: we use the term galaxy-lensing correlations to refer to both galaxy-shear and galaxy-magnification correlations. Measurements of galaxy-shear correlations using a background galaxy sample (for shear) and a foreground galaxy sample (for counts) are often referred to as galaxy-galaxy lensing in the literature. Measurements of galaxy-magnification correlations using a background quasar sample (for counts) and a foreground galaxy sample (for counts) are sometimes referred to as galaxy-quasar associations.
 - [32] R.E. Smith, R. Scoccimarro, and R.K. Sheth, *Phys. Rev. D* **75**, 063512 (2007).
 - [33] M. Bartelmann and P. Schneider, *Phys. Rep.* **340**, 291 (2001).
 - [34] M. LoVerde and N. Afshordi, arXiv:0809.5112 [*Phys. Rev. D* (to be published)].
 - [35] D.J. Eisenstein and W. Hu, *Astrophys. J.* **496**, 605 (1998).
 - [36] R.E. Smith *et al.* (The Virgo Consortium), *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **341**, 1311 (2003).
 - [37] M. LoVerde, L. Hui, and E. Gaztanaga, *Phys. Rev. D* **77**, 023512 (2008).
 - [38] J. A. Tyson (LSST), *AIP Conf. Proc.* **870**, 44 (2006).
 - [39] A. Refregier *et al.*, arXiv:astro-ph/0610062.
 - [40] G.M. Bernstein, arXiv:0808.3400.

PHYSICAL REVIEW D **78**, 123517 (2008)

Conclusions et perspectives

Conclusions et Perspectives

Le mécanisme de Vainshtein permet à certains modèles de gravité d'être proches de la Relativité Générale au voisinage des corps massifs, tout en modifiant fortement les lois de la gravitation à grandes distances.

Une part importante du travail de thèse présenté ici a été consacrée à la démonstration de la validité de ce mécanisme, et à la preuve de l'existence de solutions à symétrie sphérique, asymptotiquement plates, de la gravité massive, qui soient proches de la solution de Schwarzschild à petites distances. La description de la méthode que nous avons suivie pour parvenir à ces résultats a fait l'objet de la Partie II de ce mémoire. Dans un premier temps, l'étude de la gravité massive dans la limite de découplage nous a permis de simplifier les équations à résoudre, d'isoler le degré de liberté scalaire au centre du mécanisme de Vainshtein, et d'identifier des solutions à symétrie sphérique. Nous avons ensuite généralisé ces solutions à la théorie complète, où toutes les non-linéarités sont prises en compte. Nous avons ainsi mis en évidence l'existence, en présence d'une source, d'une solution régulière en tout point, notamment à l'origine. Nous avons pu vérifier que cette solution était très différente de la solution de Schwarzschild à grandes distances, mais était très proche de la Relativité Générale au voisinage de la source, confirmant ainsi l'hypothèse de Vainshtein.

Grâce à la compréhension du mécanisme de Vainshtein, acquise au travers de notre étude de la gravité massive, il nous a été ensuite possible de généraliser ce mécanisme, au-delà des modèles de gravité massive proprement dits. Nous avons ainsi proposé, à la Partie III, une nouvelle classe de théories scalaire-tenseur : les théories de k -Mouflage. Ces modèles de gravité modifiée contiennent un champ scalaire en plus du graviton usuel. À grandes distances de toute source, ce champ scalaire est libre de se propager, et modifie donc radicalement la gravité. Au voisinage de sources massives, le champ scalaire interagit fortement avec lui même et s'en trouve "camouflé", grâce au mécanisme de Vainshtein. Ces modèles démontrent que le mécanisme de Vainshtein peut exister pour des modèles très divers, qui ne sont pas nécessairement reliés à la gravité massive ou à la présence de dimensions supplémentaires.

Enfin, nous avons présenté les contraintes expérimentales que doit respecter toute théorie de gravité modifiée afin d'être considérée comme viable. Ces contraintes peuvent provenir de tests locaux, dans le système solaire ou dans les systèmes binaires. Elles peuvent également être de nature cosmologique. De nombreuses observables cosmologiques sont ainsi disponibles : SN Ia, densité de galaxies, CMB, cisaillement cosmique, biais d'amplification, etc. Nous avons à ce titre, montré que le biais d'amplification pouvait altérer la précision de certaines corrélations d'observables cosmologiques (corrélations galaxies-lentilles).

Enfin, nous avons pu voir que les expériences, en cours et futures, visant à détecter les ondes gravitationnelles, dessinaient d'intéressantes perspectives de tests des modèles cosmologiques et de gravitation.

De nombreuses pistes demeurent à explorer au sujet des théories de gravité modifiée, dans le prolongement des résultats que nous avons présentés.

Il serait ainsi très intéressant d'étudier plus avant l'existence de solutions à symétrie sphérique dans les modèles de gravité massive et de k -Mouflage, dans le cas d'objets compacts. Un tel projet requiert notamment de choisir un système de coordonnées adaptées, afin d'éviter la singularité de coordonnées de la métrique de Schwarzschild à l'horizon du trou noir. Dans le cas d'étoiles compactes, il peut se révéler nécessaire de modéliser finement l'équation d'état de la matière au sein de la source.

Une étude systématique des solutions à symétrie sphérique des théories de k -Mouflage apparaît également comme une direction de travail pertinente. Cela permettrait en effet de connaître les modèles dans lesquels le mécanisme de Vainshtein est valide. Cette classification serait utile pour sélectionner des modèles de gravité particulièrement intéressants, ou pour construire des modèles plus complexes et plus réalistes.

L'étude de la cosmologie des modèles de k -Mouflage pourrait également se révéler être une voie intéressante, notamment en essayant de reproduire l'accélération de l'Univers à partir de ces modèles.

D'un point de vue observationnel, la théorie des perturbations cosmologiques linéaires ayant été bien étudiée, il semble particulièrement prometteur de se tourner vers le régime non-linéaire des perturbations en gravité modifiée. Les échelles non-linéaires sont précisément celles où le mécanisme de caméléon et de Vainshtein entrent en action. L'étude des phénomènes cosmologiques non-linéaires permettra donc de tester le détail de ces mécanismes.

Enfin, de nombreux projets expérimentaux ambitieux devraient bientôt entrer en fonctionnement, parmi lesquels on peut citer le satellite Planck et le LHC, ainsi qu'à plus long terme, l'interféromètre spatial LISA, le projet LSST ou encore le satellite Euclid. Les données expérimentales qui seront récoltées permettront de tester plus avant les modèles de gravité modifiée que nous avons évoqués. Il n'est d'ailleurs pas à exclure que ces résultats expérimentaux ouvrent de nouvelles perspectives, indiquant la direction à suivre au-delà de la Relativité Générale.

Annexes et bibliographie

Annexe A

Notations et abréviations

Sommaire

A.1 Notations	251
A.2 Abréviations	253

A.1 Notations

Dans ce mémoire, nous adoptons les notations suivantes :

Métriques

- La signature de la métrique est $(-, +, +, \dots)$.
- Dans la jauge que nous avons appelée *jauge de Schwarzschild* à la Section 3.1.1, les métriques $g_{\mu\nu}$ et $f_{\mu\nu}$ prennent la forme

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= -e^{\nu(R)} dt^2 + e^{\lambda(R)} dR^2 + R^2 d\Omega^2, \\ f_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= -dt^2 + \left(1 - \frac{R\mu'(R)}{2}\right)^2 e^{-\mu(R)} dR^2 + e^{-\mu(R)} R^2 d\Omega^2. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

- La métrique utilisée en cosmologie est écrite en jauge longitudinale, et prend la forme

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + a^2(1 - 2\psi)\delta_{ij}dx^i dx^j. \quad (\text{A.2})$$

Unités et constantes

- On utilise, sauf mention contraire, un système d'unité dans lequel $c = \hbar = 1$.
- La masse de Planck réduite est liée à la constante gravitationnelle par $M_P^{-2} = 8\pi G$.

Action d'Einstein-Hilbert

- Sauf mention contraire, l'action d'Einstein-Hilbert prend la forme

$$S = \frac{M_P^2}{2} \int dx^4 \sqrt{-g} R \quad (\text{A.3})$$

Symboles

Quelques symboles fréquemment rencontrés :

Symbole	Formule	Définition
m		masse du graviton
M		masse de la source
Λ	$(M_P m^4)^{1/5}$	échelle de couplage fort en gravité massive
R_S	$2GM$	rayon de Schwarzschild
R_V	$(R_S m^{-4})^{1/5}$	rayon de Vainshtein
R_\odot		rayon de la source
a	$R_V m = (R_S m)^{1/5}$	

Coordonnée radiale

Nous utilisons trois définitions de la coordonnée radiale, selon le contexte :

- coordonnée physique ; le symbole utilisé est R .
- coordonnée adaptée au développement à grande distance (*cf.* Eq. (3.13)) ; le symbole utilisé est $z \equiv R \times m$.
- coordonnée adaptée à la limite de découplage ; le symbole utilisé est $\xi \equiv R/R_V$.

Normalisation des champs

Lors de l'étude de la gravité massive, il est nécessaire de redéfinir les champs (*cf.* Section 4.1.1) ; deux normalisations sont utilisées :

- normalisation *canonique* :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{h}_{\mu\nu} &\equiv M_P h_{\mu\nu}, \\ \tilde{A}_\mu &\equiv M_P m A_\mu, \\ \tilde{\phi} &\equiv m^2 M_P \phi, \end{aligned} \right| \begin{aligned} \tilde{\rho} &\equiv \rho/M_P, \\ \tilde{P} &\equiv P/M_P. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Les fonctions utilisées pour les solutions à symétrie sphérique de la gravité massive prennent alors la forme

$$\begin{aligned} \tilde{\nu} &\equiv M_P \nu, \\ \tilde{\lambda} &\equiv M_P \lambda, \\ \tilde{\mu} &\equiv m^2 M_P \mu. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

– normalisation *adimensionnée* :

$$\left. \begin{aligned} w(\xi) &\equiv a^{-2} \mu \\ v(\xi) &\equiv a^{-4} \nu \\ u(\xi) &\equiv a^{-4} \lambda \end{aligned} \right| \begin{aligned} \rho_a &\equiv 4\pi \frac{R_V^3}{M} \rho \\ P_a &\equiv 4\pi \frac{R_V^3}{M} P, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

où l'on rappelle que $\xi = R/R_V$ et $a = R_V m$.

A.2 Abréviations

Les abréviations suivantes sont utilisées au cours de ce mémoire :

Abréviation	Définition	Commentaires et utilisation
ADD	Arkani-Hamed, Dimopoulos et Dvali	modèle branaire [19, 20]
AGS	Arkani, Georgi et Schwarz	potentiel AGS (2.43)
BD	Boulware et Deser	potentiel BD (2.42)
DGP	Dvali, Gabadadze et Porrati	modèle DGP [111]
DL	Decoupling Limit	
GM	Gravité Massive	
KK	Kaluza-Klein	décomposition en modes massifs d'un champ 5D (<i>cf.</i> Eq. (2.5))
LD	Limite de Découplage	
MG	Massive Gravity	
PF	Pauli et Fierz	terme de masse de PF (<i>cf.</i> Sec. 2.2.2)
vDVZ	van Dam, Veltman, Zakharov	discontinuité de vDVZ

Annexe B

An introduction to Hamiltonian formalism

Sommaire

B.1 Hamiltonian formalism: general presentation	256
B.1.1 A gentle start: a traditional example	256
B.1.2 Example of a simple system with gauge invariance	257
B.1.3 General presentation of Dirac's Hamiltonian formalism	258
B.1.4 Gauge transformation and gauge fixation	260
B.1.5 Dirac's brackets	260
B.1.6 Extension to fields	262
B.2 The Electromagnetic field	262
B.2.1 The Lagrangian Formalism	262
B.2.2 The Hamiltonian formalism of electromagnetism	263
B.3 The Proca's field	266
B.3.1 The Proca's Action	266
B.3.2 Constraints and Gauge Invariance	267
B.3.3 Resolving the constraints	267
B.3.4 The Hamiltonian action	268
B.4 Proca Field with Stückelberg mechanism	268
B.4.1 The Action	268
B.4.2 Constraints and Gauge Invariance	270
B.5 ADM formulation of General Relativity	272
B.5.1 The covariant approach	272
B.5.2 Formulation in a specific base	272
B.5.3 The algebra of constraints	274
B.6 ADM formulation of Massive Gravity	275
B.6.1 The action and the momenta	275
B.6.2 Analysis at quadratic order	276
B.6.3 Analysis of the fully non-linear Massive Gravity	278

In this Appendix, we would like to gather some useful results about the Hamiltonian formalism in presence of constraints, and apply this formalism to various cases. As we shall see, this formalism is a very powerful tool to rigourously study the degrees of freedom (dof) content of a given theory. In particular, we will explain how to fix a gauge in this formalism, and how to use this gauge choice to eliminate some unphysical dof. We will also introduce the Stückelberg mechanism, which consists in reintroducing gauge freedom in theories of massive fields, and to use this new gauge freedom to separate the various dof in an elegant way; here again, the Hamiltonian formalism will help us to study in details how the “Stückelberg trick” works.

The layout of this Appendix goes as follows. We will first recall some important facts about the Dirac’s Hamiltonian formalism; we will then apply it to describe various theories: the massless vector field (electromagnetism), the massive vector field (the Proca’s field), the massive vector field with Stückelberg mechanism, General Relativity (GR) and Massive Gravity (MG). We will provide a complete Hamiltonian treatment of the latter, including in the linearized case, the non-linear case, and when the Stückelberg mechanism is included.

B.1 Hamiltonian formalism: general presentation

After two instructive examples, a very short presentation of Dirac’s Hamiltonian formalism is given. The two main references we will use here are [283] (in particular Chapters 7 and 8) and [144].

B.1.1 A gentle start: a traditional example

Consider the Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \dot{x}_i^2 - V(x_i). \quad (\text{B.1})$$

One can compute the momenta

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \dot{x}_i, \quad (\text{B.2})$$

while the canonical¹ Hamiltonian is given by the Legendre transform

$$H_C(x_i, p_i) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{x}_i - L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + V(x_i). \quad (\text{B.3})$$

The equation of motion are given by the Hamilton-Jacobi equations

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H_C}{\partial p_i} = [x_i, H] = p_i \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H_C}{\partial x_i} = [p_i, H] = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

¹We call *canonical* the usual Hamiltonian of Eq. (B.3), in opposition to the *total* Hamiltonian that will be introduced later.

where we have introduced the Poisson's bracket (PB)

$$[A, B] \equiv \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial x_i}. \quad (\text{B.5})$$

We recall that the PB are such that

$$[x_i, p_j] = \delta_{ij} \quad (\text{B.6})$$

and are the classical cousin of the quantum commutator. In general, any quantity $F(x, p)$ evolves according to $\dot{F} = [F, H_C]$.

Before ending this simple example, we would like to introduce a terminology subtlety: while in Lagrangian formalism, we would consider x and \dot{x} as being part of the same degree of freedom, in Hamiltonian formalism, x and p_x are viewed as two dof. It means that for every Lagrangian dof, there should be two Hamiltonian dof. In order to avoid any confusion, we will always specify which type of degrees of freedom we refer to.

B.1.2 Example of a simple system with gauge invariance

Consider now the Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x} - \dot{y})^2; \quad (\text{B.7})$$

it is invariant under the gauge transformation

$$\begin{aligned} \delta x &= \epsilon(t), \\ \delta y &= \epsilon(t). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

One can compute the momenta

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - \dot{y}, \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = -(\dot{x} - \dot{y}) = -p_x. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

However, it is *not possible to inverse this system of equations* and express (x, y, \dot{x}, \dot{y}) in terms of (x, y, p_x, p_y) . This is due to the presence of the constraint $\Phi = p_x + p_y = 0$. Because of this constraint, the 4D manifold spanned by (x, y, \dot{x}, \dot{y}) is not mapped in a one-to-one way into a 4D manifold, but rather to a 3D one spanned by $(x, y, p_x, p_y = -p_x)$; this manifold in phase space is called *surface of constraints*.

One can now ask the following question: can we calculate the Hamiltonian, even if we cannot inverse the velocities-momenta relation? The answer is *yes*:

$$\begin{aligned} H(x, y, \dot{x}, \dot{y}) &\equiv p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \\ &= \frac{1}{2} p_x^2(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = H(x, y, p_x, p_y) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

This will be true in general: the Hamiltonian is only a function of (x, y, p_x, p_y) and therefore can always be calculated, even in the presence of constraints.

New problems arise when we consider the equations of motion. Indeed, the HJ equations are not valid anymore: they would give $\dot{x} = \partial H_C / \partial p_x = p_x$ while we know that $p_x = \dot{x} - \dot{y}$. We will see that in this case, instead of the canonical Hamiltonian, one should use the “total” Hamiltonian

$$H_T \equiv H_C + u\Phi, \quad (\text{B.11})$$

where u is an arbitrary function which reflects the gauge freedom.

Finally, we can notice that this gauge transformation is generated by the constraint: $\delta x = [x, \epsilon\Phi] = \epsilon(t)$, $\delta y = [y, \epsilon\Phi] = \epsilon(t)$.

From this example, we can extract a few interesting points:

- in presence of constraint there is no one-to-one correspondence between the \dot{x} 's and the p 's,
- the canonical Hamiltonian can still be calculated,
- the evolution of any function F is not given by $[F, H_C]$ anymore, but by the total Hamiltonian H_T that takes into account the presence of constraints, and in case of gauge symmetry, of arbitrary function of time,
- in some cases, constraints can generate gauge symmetry.

We are now ready for a more formal exposure to the Dirac's formalism.

B.1.3 General presentation of Dirac's Hamiltonian formalism

The Dirac's Hamiltonian formalism is presented in great details in [144], so we will be brief here: we would just like to remind some important facts which will be useful in the following.

Definitions

Consider the Lagrangian $L(q^i, \dot{q}^j)$ with $i = 1, \dots, N$; the momenta are defined as

$$p_i(q, \dot{q}) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \quad (\text{B.12})$$

One can inverse the system of equations (B.12) and find \dot{q}^i as a function of (q^i, p_j) iff

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \neq 0. \quad (\text{B.13})$$

If the determinant (B.13) is null, the system is singular and there exist some primary constraints $\Phi_m(q, p) = 0$. These constraints are called primary because they come from the definition of the momenta. It's important to realize that from the Lagrangian point of view, these constraints $\Phi_m[q, p(q, \dot{q})] = 0$ are just *identities* for the q 's and \dot{q} 's, while from the Hamiltonian point of view, they constrain the q 's and the p 's to live on subspace of the phase space: the *surface of constraints*.

In any case, the canonical Hamiltonian can always be calculated

$$H_C(q, p) = p_i \dot{q}^i - L, \quad (\text{B.14})$$

since it is only a function of the q 's and p 's.

Equations of motion and Total Hamiltonian

Even if the canonical Hamiltonian can be calculated, this is not sufficient for determining the equations of motion. Because of the constraints, the \dot{q} 's cannot be expressed uniquely as function of q 's and p 's, but one needs more “coordinates”. Indeed, [144] shows that the HJ should be replaced by

$$\begin{aligned} \dot{q}^i(q, p, u) &= \frac{\partial H_C}{\partial p_i} + u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i(q, p, u) &= -\frac{\partial H_C}{\partial q^i} - u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial q^i}. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

We see that the u 's play the role of new coordinates in phase space, perpendicular to the surface of constraints, which complement the phase space coordinates q 's and p 's in order to span a space in one-to-one correspondance with the initial space of the q 's and \dot{q} 's. Equivalently, the canonical Hamiltonian should be extended to the “total” Hamiltonian

$$H_T(q, p, u) = H_C(q, p) + u^m \Phi_m(q, p), \quad (\text{B.16})$$

such that the evolution of any quantity F is given by

$$\dot{F} = [F, H_T]. \quad (\text{B.17})$$

The form of H_T is quite natural: it takes into account the arbitrariness of the functions u 's, leads to the correct equations of motions for the p 's and q 's and is equal to the canonical Hamiltonian “on-shell” (i.e. on the surface of constraints).

Chain of constraints

The next step is to enforce the conservation of the constraints in time. Once again, we don't want to be very general here, so let's take a very simple example with only one constrain Φ_1 . The conservation of this constraint reads

$$\dot{\Phi}_1 = [\Phi_1, H_T] = [\Phi_1, H_C] + u^1 [\Phi_1, \Phi_1] = [\Phi_1, H_C]. \quad (\text{B.18})$$

Several cases are possible:

- $\dot{\Phi}_1 \approx 0$ (the symbol \approx means “= on the surface of constraints”): Φ_1 is automatically conserved, and u^1 is arbitrary,
- $\dot{\Phi}_1 \not\approx 0$ (the symbol $\not\approx$ means “ \neq on the surface of constraints”). This gives a new *secondary* constraint $\Phi_2 \approx \dot{\Phi}_1$ and different sub-cases are possible:
 - $[\Phi_1, \Phi_2] \approx 0$: we have to enforce the conservation of Φ_2 , etc.

- $[\Phi_1, \Phi_2] \not\approx 0$. In this case, the equation $\dot{\Phi}_2 \approx 0$ fixes u^1 : there is no gauge freedom.

In general, if $[\Phi_i, \Phi_j] \approx 0$ for any j , Φ_i is said to be *first-class constraint*. It is associated with a gauge invariance, and u^i is arbitrary. On the contrary, if there exists an j such that $[\Phi_i, \Phi_j] \neq 0$ on the surface of constraints, Φ_i is said to be *second-class constraint*, and u^i is fixed by the chain of constraints.

B.1.4 Gauge transformation and gauge fixation

Dirac's conjecture

We have seen on the simple example of the paragraph B.1.2 that the gauge transformation was generated by the (first-class) constraint of the model. This is a trivial example of the Dirac's conjecture, which states that *in general, the first class constraints generate gauge transformations*.

This can be easily seen for primary first-class constraints. For example, consider the case where there is only one (necessarily first-class) constraint Φ_0 . u^0 is arbitrary; however, the time evolution of any function F depends on u^0 , so this should correspond to a gauge transformation:

$$\delta F = \epsilon [F, \Phi_0]. \quad (\text{B.19})$$

The Dirac's conjecture extends this result to any primary or secondary first class constraint.

Gauge fixation

How to fix the gauge is quite clear in the Hamiltonian language: for each first-class constraint Φ , one should add a new constraint $\chi(q, p)$ such that $[\Phi, \chi] \not\approx 0$, i.e. such that Φ is not first class anymore. Once all the first-class constraints have been fixed, the constraints $\chi_m = 0$ are such that no linear combination of the type $u^m [\chi_m, \chi_n]$ vanish. This implies that $\det C \not\approx 0$, where $C_{mn} = [\chi_m, \chi_n]$. Note that there must always be an even number of independent second class constraints.

Each second class constraint should allow to get rid of one unphysical dof. We would like to see how to do so, and understand how to restrict the theory to only physical dof. For this purpose, we need to introduce another structure: the Dirac's brackets.

B.1.5 Dirac's brackets

When all the constraints are second class, one can define the Dirac's brackets (DB):

$$[A, B]_D \equiv [A, B] - [A, \chi_m] (C^{-1})^{mn} [\chi_n, B]. \quad (\text{B.20})$$

The DB have various desirable properties, among which two are particularly important:

- for any A , $\dot{A} = [A, H_T] \approx [A, H_T]_D$, due to the fact that the constraints are conserved on the surface of constraints, i.e. $[\chi_n, H_T] \approx 0$,
- for any A and any constraint χ_m , $[\chi_m, A]_D = 0$, so one can enforce the constraints before or after calculating the DB.

Thanks to these two properties, the DB will help us to understand how to eliminate the unnecessary dof, and write everything in terms of physical dof. For example, consider the case where there are $2N$ dof (q^i, p_i) and $2M$ second-class constraints: this means that $2M$ dof can be killed by the constraints (let's call them $(\mathcal{Q}^r, \mathcal{P}_r)$), in which case only $2(N-M)$ physical dof should remain (let's call them (Q^a, P_b)). By definition of the “coordinates” of the phase space, $[\mathcal{Q}^r, Q^a] = [\mathcal{Q}^r, P_b] = [\mathcal{P}_r, Q^a] = [\mathcal{P}_r, P_b] = [Q^a, Q^b] = [P_a, P_b] = [\mathcal{Q}^r, \mathcal{Q}^s] = [\mathcal{P}_r, \mathcal{P}_s] = 0$, while $[\mathcal{Q}^r, \mathcal{P}_s] = \delta_s^r$ and $[Q^a, P_b] = \delta_b^a$.

Suppose in addition that the constraints are of the particular form (actually, it is always possible to do a canonical transformation to be in this situation)

$$\begin{aligned}\chi_r &= \mathcal{Q}^r - f^r(Q^a, P_b) \\ \chi_{M+r} &= \mathcal{P}_r,\end{aligned}\tag{B.21}$$

where $r = 1, \dots, M$. Imagine now that we consider a quantity $A(Q^a, P_b)$ and want to find its evolution. It is given by

$$\dot{A} = [A, H_T] \approx [A, H_T]_D \approx [A, H_C(P, Q)]_D,\tag{B.22}$$

where we have used the constraints inside the brackets to get $H_C(P, Q)$ out of $H_C(P, Q, \mathcal{Q}, \mathcal{P})$. At this point, we notice that

$$[A, H_C(P, Q)]_D = [A, H_C(P, Q)].\tag{B.23}$$

This is due to the specific form of the constraints (B.21), which are such that for any functions $A(P, Q)$ and $B(P, Q)$,

$$[A, \chi_m] (C^{-1})^{mn} [\chi_n, B] = \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^M [A, \chi_r] (C^{-1})^{rs} [\chi_s, B] = 0,\tag{B.24}$$

where the first equality holds because $[A(P, Q), \chi_{m>M}] = [A(P, Q), \mathcal{P}_{r=m-M}] = 0$ and the second equality holds because $(C^{-1})^{rs} = 0$ for $r < M, s < M$ (see for example Eq. 7.A.11 of [283]). This yields

$$\dot{A} \approx [A, H_C(P, Q)].\tag{B.25}$$

In the above equation, nothing depends on the constraints; we can thus replace the \approx symbol by an $=$, and we get the final result

$$\dot{A} = [A, H_C(P, Q)].\tag{B.26}$$

We have succeeded in getting rid of the unnecessary dof and in writing the evolution equation of A only in terms of the physical ones.

This result can actually be extended to the case where only a subset of the constraints is used to get rid of some of the dof. Imagine for example that the constraints (B.21) are only a subset of the constraints, i.e. there exist other constraints² $\bar{\chi}_q(P, Q)$ on the coordinates.

²We suppose that these constraints depend only on the P 's and Q 's since we can always redefine the constraints such that this is true; indeed, it suffices to resolve the constraints χ_r directly in the other constraints $\bar{\chi}_q$ to obtain the latter under the form $\bar{\chi}_q(P, Q)$.

It is then easy to prove, following a demonstration similar to the one presented above, that the evolution of any quantity $A(P, Q)$ is given by

$$\dot{A} = [A, \bar{H}_T(P, Q)] , \quad (\text{B.27})$$

where \bar{H}_T is the Hamiltonian in which the constraints (B.21) have been resolved.

To conclude, when some of the constraints are in the form (B.21), it is possible to use them to get rid of $2M$ dof, and simplify the theory accordingly. Note however that the specific form (B.21) is crucial: in general, replacing directly the constraints inside the Poisson brackets is usually totally wrong! It's only in some very specific cases, like the one of Eq. (B.21), that the constraints can be used directly inside the PB to simplify the Hamiltonian.

B.1.6 Extension to fields

In the following, we will be interested in the study of fields $q^i(x), \pi_j(x)$ rather than in point particles. It basically works the same way, with additional δ functions. For example, the commutation relations read

$$[q^i(x), \pi_j(x')] = \delta^{(3)}(x - x') \delta_j^i, \quad (\text{B.28})$$

where $\delta^{(3)}$ is the Dirac distribution in the 3D. We also define a Hamiltonian density $\mathcal{H}_T(x)$, so that $H_T \equiv \int d^3x \mathcal{H}_T(x)$. The evolution of any function $F(x)$ is then given by

$$\dot{F}(x) = [F(x), H_T] = \int d^3x' [F(x), \mathcal{H}_T(x')]. \quad (\text{B.29})$$

We are now ready to apply the Dirac's Hamiltonian formalism to the most famous gauge theory: the electro-magnetic field.

B.2 The Electromagnetic field

B.2.1 The Lagrangian Formalism

The action and the Equations of Fields

We start with the usual action for electromagnetism³

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} F_{i0} F^{i0} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} . \quad (\text{B.30})$$

The equations of fields are easily found to be

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{B.31})$$

We know that even if the photon is described by a vector field with four components, only two Lagrangian dof propagate (the two usual polarizations of the photon). Let's review how the dof can be counted.

³In these notes, we use the $(-, +, +, +)$ signature for the metric.

How to count the degrees of freedom

Basically, A_μ contains four variables, and there is the gauge freedom

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (\text{B.32})$$

that kills two of them, so it remains two dof. A good way to see it in more details is to proceed to the following decomposition of A_μ : A_μ is made of two scalars A_0, A_L and of a transverse vector A_i^T such that

$$\begin{cases} \partial^i A_i^T = 0, \\ A_i = A_i^T + \partial_i A_L. \end{cases} \quad (\text{B.33})$$

Then, the gauge transformation (B.32) can be rewritten

$$\begin{cases} A_0 \rightarrow A_0 + \dot{\Lambda}, \\ A_L \rightarrow A_L + \Lambda, \\ A_i^T \rightarrow A_i^T. \end{cases} \quad (\text{B.34})$$

Now, it is straightforward to check that any solution (A_0, A_L, A_i^T) can be related to the solution $(A'_0 = 0, A'_L = 0, A_i^T)$ by a gauge transformation. Indeed, by choosing $\Lambda = -A_L$, we can kill the longitudinal dof; then, it is obvious, using (B.31), that $A'_0 = A_0 + \dot{\Lambda} = 0$. More generally, it implies that two solutions with the same transverse components are related by a gauge transformation and as a consequence are physically equivalent. In other words, whatever the scalar modes are, it does not matter: these components are not physical dof. The only physical modes are the two transverse ones.

Other reasonings are possible, which lead of course to the same conclusion. For example, a usual method consists in first fixing the so-called ‘‘Lorentz gauge’’ $\partial_\mu A^\mu = 0$, that relates the two scalar modes; then, one can realize that there is still a residual gauge freedom:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \xi, \text{ with } \square \xi = 0 \quad (\text{B.35})$$

that allows to put one of the scalar modes to zero, cancelling also the other scalar mode at the same time.

B.2.2 The Hamiltonian formalism of electromagnetism

The Legendre transform

Starting with the action (B.30), we can calculate the associated momenta

$$\begin{cases} \pi^0 = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A_0)} = 0, \\ \pi^i = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A_i)} = F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i. \end{cases} \quad (\text{B.36})$$

We see that the momentum π^0 associated with A_0 is automatically null: this is a (primary) constraint on π^0 . We can give it a name: $\Phi_1 = \pi^0 = 0$. Despite this constraint, let's

continue and calculate the canonical Hamiltonian density:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_C(A_\mu, \pi^\mu) &= \pi^i \partial_0 A_i - \frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \\
&= \pi^i (\partial_i A^0 - \partial^0 A_i) - \frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \pi^i \partial_i A^0 \\
&= \frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \pi^i \partial_i A_0.
\end{aligned} \tag{B.37}$$

Since we know that the Hamiltonian is defined as $H = \int dx^3 \mathcal{H}$, we can perform an integration by part on the last term of (B.37), and up to a surface term, we obtain:

$$\mathcal{H}_C(A_\mu, \pi^\mu) = \frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - A_0 \partial_i \pi^i. \tag{B.38}$$

In order to write the equations of fields, we need to introduce the function $u^1(t)$, which can be thought of as coordinates on the surface of the inverse image of a given π^ν [144]. These equations of fields read

$$\begin{cases} \dot{A}_\mu = \frac{\partial H}{\partial \pi^\mu} + u^1 \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \pi^\mu}, \\ \dot{\pi}^\mu = -\frac{\partial H}{\partial A_\mu} - u^1 \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial A_\mu}, \\ \Phi_1(A_\mu, \pi^\nu) = \pi^0 \approx 0. \end{cases} \tag{B.39}$$

One can check that these equations can be derived from the total Hamiltonian

$$H_T = H_C + u^1 \Phi_1. \tag{B.40}$$

This means that the time derivative of any function F can be calculated thanks to

$$\dot{F} = [F, H_T] = [F, H_C] + u^1 \cdot [F, \Phi_1], \tag{B.41}$$

in agreement with Eq. (B.17). The equations of fields are

$$\begin{cases} \dot{A}_0 = u^1 \\ \dot{A}_i = \pi_i + \partial_i A_0 \\ \dot{\pi}^0 = \partial_i \pi^i \\ \dot{\pi}^i = \partial_k \partial^k A^i - \partial^i \partial_k A^k \\ \pi^0 \approx 0 \end{cases} \tag{B.42}$$

The chain of constraints

We have now to calculate the chain of constraints: the primary constraints have to be conserved in time, generating secondary constraints and so on. In our case, we have

$$\Phi_2 \equiv \dot{\Phi}_1 = [\Phi_1, H] + u^1 [\Phi_1, \Phi_1] = -\partial_i \pi^i \approx 0 \tag{B.43}$$

It happens that the secondary constraint Φ_2 is automatically conserved in time; as a consequence, there are no more constraints.

We would like to point out that the previous results can also be derived from a “Hamiltonian action” formalism. Indeed, let’s define

$$\mathcal{S}_H[A_\mu, \pi^\nu, u^1] = \int d^4x \left\{ \pi^i \dot{A}_i + \pi^0 \dot{A}_0 - \left[\frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right] + A_0 \cdot \partial_i \pi^i - u^1 \cdot \pi^0 \right\}. \quad (\text{B.44})$$

Varying this action respect to the fields A_μ and π^μ leads to the equations of motion (B.42), while varying the above action respect to the u^1 leads to the constraint $\Phi_1 = \pi^0 \approx 0$ (where here the \approx means “on-shell”); since u^1 is in fact a Lagrange multiplier, it is possible to enforce directly the associated constraint into the action (B.44), yielding

$$\mathcal{S}_H[A_\mu, \pi^i] = \int d^4x \left\{ \pi^i \dot{A}_i - \left[\frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right] + A_0 \cdot \partial_i \pi^i \right\}. \quad (\text{B.45})$$

We see now that A_0 is also a Lagrange multiplier, which enforces the second constraint $\Phi_2 = -\partial_i \pi^i \approx 0$.

Comparison with the Euler-Lagrange equations

It is of interest to see how the Euler-Lagrange equations are recovered in the Hamiltonian formalism. Clearly, the second equation of the system of equations (B.42), $\dot{A}_i = \pi_i + \partial_i A_0$, is just a rewriting of the second equation of (B.36): $\pi_i = F^{i0}$; besides, the fourth equation of (B.42), combined with the time derivative of the second, gives

$$\partial^\mu F_{\mu k} = 0, \quad (\text{B.46})$$

while the third yields

$$\partial^\mu F_{\mu 0} = 0. \quad (\text{B.47})$$

These are the Maxwell’s equations. The constraint $\Phi_2 = -\partial_i \pi^i = 0$ is just the Gauss’ law.

Constraints and Gauge invariance

We have identified the two constraints

$$\Phi_1 = \pi^0, \quad (\text{B.48})$$

$$\Phi_2 = -\partial_i \pi^i. \quad (\text{B.49})$$

We can now check that these constraints are *first class constraints*, i.e. that their Poisson’s brackets with any other constraint vanish on the surface of constraints. Indeed, one can easily verify that

$$[\Phi_1, \Phi_1] = [\Phi_1, \Phi_2] = [\Phi_2, \Phi_2] = 0. \quad (\text{B.50})$$

As we explain in the section B.1.5, first-class constraints generate the gauge transformations (the so-called *Dirac’s conjecture*). Here, the gauge generator is

$$G[\varepsilon] \equiv \int d^3x' (\dot{\varepsilon} \Phi_1 + \varepsilon \Phi_2) = \int d^3x' \left(\dot{\varepsilon} \pi^0 + (\partial_k \varepsilon) \pi^k \right) = \int d^3x' (\partial_\nu \varepsilon) \pi^\nu, \quad (\text{B.51})$$

and

$$\delta A_\mu(t, \vec{x}) = [A_\mu, G[\varepsilon]] = \int d^3x' \partial'_\nu \varepsilon [A_\mu(t, \vec{x}), \pi^\nu(t, \vec{x}')] = \partial_\mu \varepsilon. \quad (\text{B.52})$$

We recover the usual gauge transformation, confirming on this example the Dirac’s conjecture.

Fixing the gauge

It is often useful to “fix the gauge”, for example in order to quantize in a specific gauge, or to count dof. It can be done in a straightforward manner in the Hamiltonian formalism: one has just to add *by hand* two new constraints Φ_3 and Φ_4 , that make the two original first class constraints be second class. After this procedure, the system is a pure second class system, each constraint killing one Hamiltonian dof.

Coulomb’s gauge One can chose for example the *Coulomb’s gauge*

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \pi^0 \\ \Phi_2 &= -\partial_i \pi^i \end{aligned} \right| \begin{aligned} \Phi_3 &= \partial_i A^i \\ \Phi_4 &= A^0 \end{aligned} . \quad (\text{B.53})$$

One can check that $\dot{\Phi}_3 \approx \Phi_4$; besides, $\dot{\Phi}_4 \approx 0 \Rightarrow u^1 = 0$. This shows that the system of constraints (B.53) fixes the gauge completely.

Lorentz gauge Another popular choice of gauge is the “Lorentz gauge” $\partial_\mu A^\mu = 0$. However, it is well known that this choice does not fix totally the gauge: there is the residual gauge freedom (B.35). This residual invariance means that the Lorentz gauge is not unique in the Hamiltonian formalism, but rather corresponds to a class of gauges. One can check that the Coulomb’s gauge fixing (B.53) happens to be a member of this class.

B.3 The Proca’s field

We now turn to the theory of a massive vector field, often called Proca’s field.

B.3.1 The Proca’s Action

We add a mass term into the usual EM action (B.30) (see e.g. [159]):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu. \quad (\text{B.54})$$

The momenta are unchanged compared to the EM ones

$$\left\{ \begin{aligned} \pi^0 &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A_0)} = 0, \\ \pi^i &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A_i)} = F^{i0} . \end{aligned} \right. \quad (\text{B.55})$$

The Hamiltonian density is given by

$$\mathcal{H}_C(A_\mu, \pi^\mu) = \frac{1}{2}\pi^i \pi_i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - A_0 \partial_i \pi^i + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu. \quad (\text{B.56})$$

The general expression of the equations of fields are still given by (B.39); more precisely, they read

$$\begin{cases} \dot{A}_0 = u^1 \\ \dot{A}_i = \pi_i + \partial_i A_0 \\ \dot{\pi}^0 = \partial_i \pi^i - m^2 A^0 \\ \dot{\pi}^i = \partial_k \partial^k A^i - \partial^i \partial_k A^k - m^2 A^i \\ \pi^0 \approx 0 \end{cases} \quad (\text{B.57})$$

Combining these equations, one can recover the usual Proca's equations of fields

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = m^2 A^\nu, \quad (\text{B.58})$$

from which it is easy to deduce that

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^\mu &= 0, \\ (-\partial^2 + m^2) A^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

The first equation show that the field is automatically in ‘‘Lorentz gauge’’: there is no gauge freedom anymore.

B.3.2 Constraints and Gauge Invariance

We still have two constraints $\Phi_1 = \pi^0 = 0$ and $\Phi_2 = m^2 A^0 - \partial_i \pi^i$. The constraint Φ_1 fixes π^0 while Φ_2 fixes A_0 . As a consequence, the A_μ field has only 6 Hamiltonian dof which propagate, *i.e.* three Lagrangian dof, as it should.

The next step is to look at the gauge invariance. More precisely, we showed that the theory is not gauge invariant because of the mass term. So, we expect the constraints Φ_1 and Φ_2 to be *second-class constraints*, *i.e.* we expect it not to commute one with each other. Indeed, one can easily compute

$$[\Phi_1, \Phi_2] = -m^2, \quad (\text{B.60})$$

which shows that the system is second class.

B.3.3 Resolving the constraints

Thanks to the general discussion of the section B.1.5, where we presented the Dirac's brackets formalism, we know that we can resolve the constraints directly into the Hamiltonian, since the constraints are of the form (B.21). The simplified Hamiltonian, which is obtained from the original Hamiltonian by resolving the constraints in it (*i.e.* replacing $\pi^0 = 0$ and $A^0 = \frac{1}{m^2} \partial_i \pi^i$), reads

$$H_{resolved}(A_i, \pi^j) = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{2} m^2 A_i A^i + \frac{1}{2m^2} (\partial_i \pi^i)^2 \right). \quad (\text{B.61})$$

The associated eof for the physical fields A_i, π^i can then be derived from it and we obtain

$$\begin{cases} \dot{A}_i = [A_i, H_{resolved}] = \pi_i - \frac{1}{m^2} \partial_i (\partial_j \pi^j) \\ \dot{\pi}^i = [\pi^i, H_{resolved}] = \partial_k \partial^k A^i - \partial^i \partial_k A^k - m^2 A^i. \end{cases} \quad (\text{B.62})$$

One can easily check that these eof are exactly the eof one would obtain starting from the original eof (B.57) and perform the replacement $\pi^0 = 0$ and $A^0 = \frac{1}{m^2} \partial_i \pi^i$ directly in them. This explicit calculation is thus a good example of how it is possible to resolve the second class constraints directly in the Hamiltonian.

B.3.4 The Hamiltonian action

Here again, it is possible to recover the previous results, starting from the action

$$\mathcal{S}_H[A_\mu, \pi^\nu, u^1] = \int d^4x \left\{ \pi^i \dot{A}_i + \pi^0 \dot{A}_0 - \left[\frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right] + A_0 \cdot \partial_i \pi^i - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu - u^1 \cdot \pi^0 \right\}. \quad (\text{B.63})$$

The Lagrange multiplier u^1 enforces the constraint $\Phi_1 = \pi^0 = 0$. Once inserted into the action (B.63), this leads to

$$\mathcal{S}_H = \int d^4x \left\{ \pi^i \dot{A}_i - \left[\frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right] + A_0 \cdot \partial_i \pi^i - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \right\}, \quad (\text{B.64})$$

which is just the action one would obtain replacing the \dot{A} 's by the π 's in the initial Lagrangian action (B.54). Now, we see that A_0 is not a lagrange multiplier anymore; instead, the variation of the action respect to A_0 determines A_0 itself through

$$m^2 A^0 = \partial_i \pi^i; \quad (\text{B.65})$$

this is just the constraint Φ_2 .

B.4 Proca Field with Stückelberg mechanism

We now introduce the “Stückelberg trick”, which consists in reintroducing the gauge invariance broken by the mass term. We will show that it allows to separate the various degrees of freedom of a massive field in a covariant way. We will study it⁴ using both a Lagrangian and a Hamiltonian approach.

B.4.1 The Action

We can arbitrarily redefine the Proca's field by $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \phi$, without changing the theory:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 (A_\mu - \partial_\mu \phi)(A^\mu - \partial^\mu \phi). \quad (\text{B.66})$$

This new action is now invariante under

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \\ \phi &\rightarrow \phi + \Lambda. \end{aligned} \quad (\text{B.67})$$

⁴Note that the Proca Field with Stückelberg mechanism is also presented in Sec. 2.4.1.

At this point, we can have a doubt about the term $\partial_0 \phi A^0$: indeed, one can also integrate by part in the action and obtain a time derivative of A_0 . However, this just change some calculations but the main results are of course the same ; so we keep the form above, freely integrating by part the spacial derivative, but considering $A_\mu, \partial_0 A^\mu, \phi, \partial_0 \phi$ as independent variables. The momenta read

$$\begin{cases} \pi^0 = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A_0)} = 0, \\ \pi^i = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A_i)} = F^{i0}, \\ \pi_\phi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 \phi)} = m^2(\partial_0 \phi - A_0). \end{cases} \quad (\text{B.68})$$

The Hamiltonian density is given by:

$$\mathcal{H}_C = \frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{2m^2} \pi_\phi \pi_\phi + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - A_0 (\partial_i \pi^i - \pi_\phi) + \frac{m^2}{2} (A_i - \partial_i \phi)^2. \quad (\text{B.69})$$

The general expression of the equations of fields are still given by (B.39), and the Hamiltonian action can be written as:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_H = \int d^4x \left\{ \pi^i \dot{A}_i + \pi^0 \dot{A}_0 + \pi_\phi \dot{\phi} - \left[\frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{2m^2} \pi_\phi \pi_\phi + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right] \right. \\ \left. - \frac{m^2}{2} (A_i - \partial_i \phi)^2 - A_0 (\pi_\phi - \partial_i \pi^i) - u^1 \cdot \pi^0 \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

A few remarks can be made. First, we can note that the primary constraint is still $\Phi_1 = \pi^0 = 0$: A_0 is still a non dynamical field. We also notice, like in usual E&M, that A_0 is a Lagrange multiplier in the Hamiltonian action (B.70) in which $\pi^0 = 0$ has been enforced.

We can now look for the equations of fields

$$\begin{cases} \dot{A}_0 = u^1 \\ \dot{A}_i = \pi_i + \partial_i A_0 \\ \dot{\phi} = \frac{1}{m^2} \pi_\phi + A_0 \\ \dot{\pi}^0 = \partial_i \pi^i - \pi_\phi \\ \dot{\pi}^i = \partial_k \partial^k A^i - \partial^i \partial_k A^k - m^2 (A^i - \partial^i \phi) \\ \dot{\pi}_\phi = m^2 (\partial_i \partial^i \phi - \partial_i A^i) \\ \pi^0 \approx 0 \end{cases} \quad (\text{B.71})$$

Combining these equations, one can recover the covariant equations of fields (on the constraints surface):

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = m^2 (A^\nu - \partial^\nu \phi) \quad (\text{B.72})$$

It is easy to deduce from the last equation that

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = \partial_\mu A^\mu, \quad (\text{B.73})$$

which means that the field A_μ is automatically in the Lorentz gauge.

B.4.2 Constraints and Gauge Invariance

Let's now study the various constraints of this theory. First, we have $\Phi_1 = \pi^0 = 0$. If we ask this constraint to be conserved in time, we impose:

$$\Phi_2 = -\dot{\pi}^0 = -\partial_i \pi^i + \pi_\phi = 0. \quad (\text{B.74})$$

But from (B.71), we know that $\pi_\phi = m^2(\dot{\phi} - A_0)$, so this is just the generalisation of the Gauss' Law (B.72)

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = m^2(A^0 - \partial^0 \phi). \quad (\text{B.75})$$

There are no more constraints coming from the conservation of Φ_1 . Computing the Poisson bracket of the two constrain

$$[\Phi_1, \Phi_2] = 0, \quad (\text{B.76})$$

we see that the constraints are first class: according to the Dirac's conjecture, they should generate a gauge transformation. Indeed, consider the transformation generated by:

$$G[\Lambda] = \int d^3x' \left(\dot{\Lambda} \Phi_1 + \Lambda \Phi_2 \right) = \int d^3x' (\partial_\nu \Lambda) \pi^\nu + \Lambda \pi_\phi. \quad (\text{B.77})$$

One can compute how the fields change under the action of $G[\Lambda]$, and obtain

$$\begin{cases} \delta A_\mu(t, \vec{x}) = [A_\mu, G[\Lambda]] = \int d^3x' \partial'_\nu \Lambda \cdot [A_\mu(t, \vec{x}), \pi^\nu(t, \vec{x}')] = \partial_\mu \Lambda, \\ \delta \phi = [\phi, G[\Lambda]] = \int d^3x' \Lambda \cdot [\phi(t, \vec{x}), \pi_\phi(t, \vec{x}')] = \Lambda. \end{cases} \quad (\text{B.78})$$

It indeed corresponds to the gauge invariance (B.67) of the action (B.66).

Unitary gauge

One can choose several gauges; one of them is the *unitary gauge*, for which one recovers the initial theory (B.54). In Hamiltonian formalism, it corresponds to adding two new constraints Φ_3 and Φ_4 to the constraints Φ_1 and Φ_2 in order to obtain the second class system

$$\begin{cases} \Phi_1 = \pi^0 \\ \Phi_2 = -\partial_i \pi^i + \pi_\phi \\ \Phi_3 = \phi \\ \Phi_4 = \frac{\pi_\phi}{m^2} + A_0 \end{cases} \quad (\text{B.79})$$

Note that $\Phi_4 = \dot{\Phi}_3$, ensuring that the constraints are conserved [248]. One can further check that u^1 is fully determined by

$$u^1 = \dot{A}_0 \approx \partial_i A^i. \quad (\text{B.80})$$

Let's try now to resolve the constraints. In particular, let's get rid of the ϕ and π_ϕ dof. The only (small) problem is that the constraints (B.79) are not exactly of the form (B.21), so it's not possible to apply directly our results of the Sec. B.1.5. Of course, since the

form of the constraints (B.79) is extremely close to the one of (B.21), it is quite obvious that one can just redo a reasoning similar to the one we exposed in the section B.1.5, and reach the same conclusion, i.e. it is possible to replace directly the constraints inside the Hamiltonian. Though, in order to illustrate the methodology, we prefer notice that the straightforward canonical transformation

$$\begin{cases} \tilde{\phi} = \pi_\phi, \\ \tilde{\pi}_\phi = -\phi, \end{cases} \quad (\text{B.81})$$

and a slight redefinition of the constraints lead to

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_1 = \pi^0 \\ \tilde{\Phi}_2 = \partial_i \pi^i - m^2 A_0 \\ \tilde{\Phi}_3 = \tilde{\phi} + m^2 A_0 \\ \tilde{\Phi}_4 = \tilde{\pi}_\phi, \end{cases} \quad (\text{B.82})$$

which are now of the form (B.21). One can then replace $\tilde{\phi}, \tilde{\pi}_\phi$ using the constraints $\tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_4$ in the Hamiltonian (B.69) and obtain exactly the Proca's Hamiltonian (B.56). In addition, the two first constraints $\tilde{\Phi}_1$ and $\tilde{\Phi}_2$ are exactly the two Proca constraints, and the equations of motions of the Stückelberg formalism along with this choice of gauge give exactly the Proca's equations of motion. This shows that the Stückelberg action theory is exactly equivalent to the original Proca's theory.

“Transverse” gauge

Another possible gauge is what we could call *Transverse gauge*

$$\begin{cases} \Phi_1 = \pi^0 \\ \Phi_2 = -\partial_i \pi^i + \pi_\phi \\ \Phi_3 = \partial_i A^i \\ \Phi_4 = \pi_\phi + \Delta A_0 \end{cases} \quad (\text{B.83})$$

It corresponds to setting to zero the longitudinal scalar $A_L \equiv \Delta^{-1}(\partial_j A^j) = 0$. Note that $\Phi_4 = \dot{\Phi}_3$, ensuring that the constraints are conserved [248]. One can check that u^1 is fully determined by

$$u^1 \approx \frac{1}{2} m^2 \phi. \quad (\text{B.84})$$

Resolving the constraints (getting rid of π^0, A_0, A_L, π_L) leads to the Hamiltonian

$$\mathcal{H}_{resolved} = \frac{1}{2} \pi_T^i \pi_i^T - \frac{1}{2} A_i^T \Delta A_T^i + \frac{m^2}{2} A_i^T A_T^i + \pi_\phi \left(\frac{1}{2m^2} - \frac{1}{2} \Delta^{-1} \right) \pi_\phi - \frac{m^2}{2} \phi \Delta \phi, \quad (\text{B.85})$$

where $\pi_T^i \equiv \pi^i - \partial^i (\Delta^{-1}(\partial_j \pi^j))$ are the transverse momenta, associated⁵ with the transverse part of the vector $A_T^i \equiv A^i - \partial^i A_L$. We see that the field ϕ is playing the role of the longitudinal mode: the Stückelberg formalism allowed us to extract the longitudinal scalar mode of the massive vector field in an easy and covariant way.

⁵It is not true in general that the transverse part of the momenta is the momentum associated with the transverse part of the vector: for quadratic actions, though, this result can be proven to hold.

B.5 ADM formulation of General Relativity

There are two equivalent approaches: the first one is covariant, and is given in great detail by Wald in [277]: elegant, but not very illuminating ; the other point of view, which corresponds to the original one by ADM [25] (see also the very good references [104, 148, 194]), chooses a particular system of coordinates, and as a consequence, is probably easier, but less covariant. We will present both of them, and give the choice of coordinates that allows to go from one to another.

B.5.1 The covariant approach

We foliate the 4D manifold into space-like sheets Σ_t , parametrized by a global time function t . We also define the vector field n^μ normal to the Σ_t , normalized to $n^\mu n_\mu = -1$, and the “3D-metric” as the metric induced by $^{(4)}g_{\mu\nu}$ on the Σ_t

$$^{(3)}g_{\mu\nu} \equiv ^{(4)}g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (\text{B.86})$$

Note that $^{(3)}g_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + n^\mu n_\nu$ is the projector on the Σ_t (such that $^{(3)}g_\nu^\mu ^{(3)}g_\rho^\nu = ^{(3)}g_\rho^\mu$ and $^{(3)}g_\nu^\mu n^\nu = 0$) and that for any vector V^μ tangent to Σ_t , $V^\mu \nabla_\mu t = 0$ (since t is defined to be constant on the surface Σ_t).

Then, we have to choose a vector t^μ that will represent the “flow of time”; more precisely, we need a mapping between the points of a reference surface, say Σ_{t_0} , and the points of an arbitrary surface Σ_t . Once we have t^μ , we can associate each point P_0 of Σ_{t_0} with the intersection P_t of Σ_t and the integral curve $x^\mu(\tau)$ such that $\frac{dx^\mu}{d\tau} = t^\mu$ and $x^\mu(\tau_0) = x_{P_0}^\mu$. A natural choice of parameter is such that the point P_t corresponds precisely to $\tau = t$, *i.e.* the integral curve is of parameter t . From this choice of parameter, it comes the condition on t^μ :

$$t^\mu \nabla_\mu t = \frac{dt}{d\tau} = 1. \quad (\text{B.87})$$

The canonical variables The canonical variables are

$$^{(3)}g_{\mu\nu} = ^{(4)}g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \quad (\text{B.88})$$

$$N = -t^\mu n_\mu, \quad (\text{B.89})$$

$$N^\mu = ^{(3)}g_\nu^\mu t^\nu. \quad (\text{B.90})$$

As already said, $^{(3)}g_{\mu\nu}$ is just the projection of the full 4D-metric on the 3D surface Σ_t : it corresponds to 6 dof. N is clearly the projection of the time flow t^μ on the normal to Σ_t and encodes one dof, whereas N^μ is the projection of t^μ onto the surface, and then carries 3 dof.

It is worth noticing (cf. [277], Eq. E.2.21) that since $t^\mu = N^\mu + N n^\mu$, and N^μ is tangent to Σ_t , we have the relation $1 = t^\mu \nabla_\mu t = N n^\mu \nabla_\mu t$, *i.e.* $N = (n^\mu \nabla_\mu t)^{-1}$.

B.5.2 Formulation in a specific base

Consider now the case where we choose a specific chart of coordinates, for which $t^\mu = (1, \vec{0})$, or equivalently for which $x^\mu = (t, x^i)$. In this case, one can realize that the normal unit

vector to Σ_t is such that

$$n_\mu = -\frac{\delta_\mu^0}{\sqrt{-g^{00}}} . \quad (\text{B.91})$$

In this particular choice of coordinates, a lot of expression can be given explicitly.

The metric

The metric is decomposed in a 3 + 1 way, introducing the lapse, the shift and the 3-metric

$$N \equiv \left(\sqrt{-^{(4)}g^{00}} \right)^{-1} , \quad (\text{B.92})$$

$$N_i \equiv {}^{(4)}g_{0i} , \quad (\text{B.93})$$

$${}^{(3)}g_{ij} \equiv {}^{(4)}g_{ij} . \quad (\text{B.94})$$

One has also to introduce the inverse 3-metric, such that ${}^{(3)}g^{ij} {}^{(3)}g_{jk} = \delta_k^i$, that allows to define $N^i \equiv {}^{(3)}g^{ij} N_j$. Then, the 4-metric and its inverse can be written as

$${}^{(4)}g_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} -N^2 + N_k N^k & N_i \\ \hline N_j & {}^{(3)}g_{ij} \end{array} \right) , \quad {}^{(4)}g^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} -\frac{1}{N^2} & \frac{N_i}{N^2} \\ \hline \frac{N_j}{N^2} & {}^{(3)}g^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \end{array} \right) \quad (\text{B.95})$$

and we have the useful relation $\sqrt{-^{(4)}g} = N\sqrt{{}^{(3)}g}$. Starting from now, we will not continue to label the 3-metric with a ${}^{(3)}$, assuming that the distinction between the 4D and the 3D metric is obvious from the context.

The action, the momenta and the Hamiltonian

One can express the Einstein-Hilbert action in terms of the 3+1 variables

$$\bar{S}_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} R = \int d^4x N \left(K^{ij} K_{ij} - K^2 + R^{(3)} \right) , \quad (\text{B.96})$$

with K_{ij} being the extrinsic curvature

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (\partial_t g_{ij} - D_i N_j - D_j N_i) . \quad (\text{B.97})$$

Note that the action \bar{S}_{EH} considered here differs from the action (2.40) by a $\frac{M_P^2}{2}$ factor. This rescaling is just chosen for convenience, in order to follow the notations of [104] and to obtain simple expression of the momenta, but do not change anything to the conclusions we will reach. In the following, we will label the rescaled actions with a bar above, as we did in the section 2.3.2. The momenta are easily found to be

$$\pi \equiv \frac{\delta \bar{\mathcal{L}}_{EH}}{\delta \dot{N}} = 0 , \quad (\text{B.98})$$

$$\pi^i \equiv \frac{\delta \bar{\mathcal{L}}_{EH}}{\delta \dot{N}_i} = 0 , \quad (\text{B.99})$$

$$\pi^{ij} \equiv \frac{\delta \bar{\mathcal{L}}_{EH}}{\delta (\dot{g}_{ij})} = \sqrt{{}^{(3)}g} (K^{ij} - K g^{ij}) . \quad (\text{B.100})$$

The two first momenta equations (B.98) and (B.99) are in fact primary constraints; we will detail below the role of these constraints. The action can be expressed in terms of these ADM variables:

$$\bar{S}_{EH} = \int d^4x \left(\pi^{ij} \dot{g}_{ij} - NR^0 - N_i R^i \right), \quad (\text{B.101})$$

while the Hamiltonian reads

$$H = \int d^3x \left(\pi \dot{N} + \pi^i \dot{N}_i + NR^0 + N_i R^i \right), \quad (\text{B.102})$$

with

$$R^0 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) - \sqrt{g} R, \quad (\text{B.103})$$

$$R^i = -2\sqrt{g} D_j \left(g^{-1/2} \pi^{ij} \right). \quad (\text{B.104})$$

Note also that our $\sqrt{g} D_j (g^{-1/2} \pi^{ij})$ is often denoted in the litterature by $\pi^{ij}{}_{|j}$ where $|j$ is understood to be the covariant derivative of the tensor density π^{ij} .

B.5.3 The algebra of constraints

As we already said, the two first momenta equations (B.98) and (B.99) are in fact *primary constraints*; they reflect the fact that N, N_i are Lagrange multipliers and as a consequence are non dynamical. One can give a name to these constraints:

$$\Phi^0 = \pi = 0, \quad \Phi^i = \pi^i = 0. \quad (\text{B.105})$$

Then, in the Lagrangian formalism, since N, N_i are Lagrange multipliers, varying the action respect to these dof leads to new constraints. In the Hamiltonian picture, these *secondary* constraints appear when we ask that the primary constraints Φ^0, Φ^i are conserved in time. These secondary constraints read

$$\Phi^4 = R^0 = 0, \quad \Phi^{4+i} = R^i = 0. \quad (\text{B.106})$$

Note that one can also define the constraints downstairs

$$\Phi_{4+i} \equiv \Phi^{4+j} g_{ij} = R^j g_{ij}. \quad (\text{B.107})$$

Algebra of constraints We introduce now the Poisson bracket such that

$$[N(x), \pi(y)] = \delta(x - y), \quad (\text{B.108})$$

$$[N_i(x), \pi^j(y)] = \delta_i^j \delta(x - y), \quad (\text{B.109})$$

$$[g_{ij}(x), \pi^{kl}(y)] = \frac{1}{2} \left(\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k \right) \delta(x - y), \quad (\text{B.110})$$

and such that all the other brackets vanish. We want to compute the algebra of constraints $[\Phi^A(x), \Phi^B(y)]$ for any pair of constraints. This is done in [104], and leads to the non-trivial

result

$$[R^0(x), R^0(y)] = 2R^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(x-y) + \left(\frac{\partial}{\partial x^i} R^i(x) \right) \delta(x-y), \quad (\text{B.111})$$

$$[R_i(x), R^0(y)] = R^0(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(x-y), \quad (\text{B.112})$$

$$[R_i(x), R_j(y)] = R_i(y) \frac{\partial}{\partial x^j} \delta(x-y) + R_j(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(x-y). \quad (\text{B.113})$$

Note that the first PB $[R^0(x), R^0(y)]$ is not trivially zero; this is due to the fact that R^0 contains derivatives of the metric whose PB with the $\frac{1}{\sqrt{g}} (\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} \pi^2)$ term in R^0 is non zero. However, we see that all the above PB vanish “on-shell”, *i.e.* on the surface of constraints: for any two constraints $[\Phi^A(x), \Phi^B(y)] \approx 0$, where we remind that \approx means on the surface of constraints. This means that the constraints are *first-class* and according to the Dirac’s conjecture, are related to the gauge symmetry of the action. Indeed, one can check that the constraints generate the diffeomorphism symmetries.

Counting of the dof goes as follows: the initial action (B.101) contains 20 Hamiltonian dof (*i.e.* 10 Lagrangian dof); 8 of them are killed by the constraints Φ^A . However, we still have to fix the gauge; this is done by adding 8 new constraints χ^B , such that now all the constraints are *second class*. This 8 new constraints kill 8 other dof. At the end, there remains 4 Hamiltonian dof that corresponds to the usual 2 tensorial modes of the gravitational waves.

B.6 ADM formulation of Massive Gravity

In this section, we would like to study the Massive Gravity from a Hamiltonian point of view, in the same spirit as in Sec. 2.3.2. As presented in Eq. (2.39), the general form of the action (without matter) is

$$\bar{S} = \int d^4x \sqrt{-g} R + \bar{S}_{int}[f, g], \quad (\text{B.114})$$

where $g_{\mu\nu}$ is the dynamical metric, and $f_{\mu\nu}$ is a background metric. Note that here again, we have rescaled the action by a $M_P^2/2$ factor compared to the action (2.40), in order to work with expressions of the momenta and constraints as simple as possible. The graviton is defined as $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - f_{\mu\nu}$. In the following, we will focus on the Boulware & Deser [49] potential (*cf.* (2.42)) with a Minkowski background metric

$$\bar{S}_{int}^{(BD)} = - \frac{m^2}{4} \int d^4x \sqrt{-f} h_{\mu\nu} h_{\sigma\tau} (\eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\tau} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\sigma\tau}), \quad (\text{B.115})$$

even if our results will hold for a much larger class of potential [83].

B.6.1 The action and the momenta

In terms of the ADM variables, the action reads

$$\begin{aligned} \bar{S} = \int d^4x \left\{ N \left(K^{ij} K_{ij} - K^2 + R^{(3)} \right) \right. \\ \left. - \frac{m^2}{4} \left(h_{ij} h_{ij} - h_{ii} h_{jj} - 2N_i N_i + 2h_{ii} \left(1 - N^2 + N_k g^{kl} N_l \right) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.116})$$

and the momenta are similar to the GR ones:

$$\begin{aligned}\pi &\equiv \frac{\delta \mathcal{L}_{EH}}{\delta \dot{N}} = 0, \\ \pi^i &\equiv \frac{\delta \mathcal{L}_{EH}}{\delta \dot{N}_i} = 0, \\ \pi^{ij} &\equiv \frac{\delta \mathcal{L}_{EH}}{\delta (\dot{g}_{ij})} = \sqrt{{}^{(3)}g} (K^{ij} - K g^{ij}).\end{aligned}\tag{B.117}$$

Using these expression, we can re-write the action (B.116) in the first order form

$$\begin{aligned}\bar{S} = \int d^4x \left\{ \pi^{ij} \dot{g}_{ij} - N R^0 - N_i R^i \right. \\ \left. - \frac{m^2}{4} \left(h_{ij} h_{ij} - h_{ii} h_{jj} - 2N_i N_i + 2h_{ii} \left(1 - N^2 + N_k g^{kl} N_l \right) \right) \right\},\end{aligned}\tag{B.118}$$

while the Hamiltonian reads

$$\begin{aligned}H_T = \int d^3x \left\{ \pi \dot{N} + \pi^i \dot{N}_i + N R^0 + N_i R^i \right. \\ \left. + \frac{m^2}{4} \left(h_{ij} h_{ij} - h_{ii} h_{jj} - 2N_i N_i + 2h_{ii} \left(1 - N^2 + N_k g^{kl} N_l \right) \right) \right\}.\end{aligned}\tag{B.119}$$

We will first study the theory at quadratic order in the action, before studying the fully non-linear case.

B.6.2 Analysis at quadratic order

In order to truncate the action at quadratic order, we define $n \equiv N - 1$. We will then suppose that the fields n , N_i and h_{ij} are much smaller than 1, and expand to second order in these variables.

The action, the momenta and the Hamiltonian

The quadratic action reads

$$\begin{aligned}\bar{S}^{(quad)} = \int d^4x \left\{ K_{ij} K^{ij} - K^2 + \mathcal{R}^{(quad)} \right. \\ \left. - n (\partial_i \partial_i h - \partial_i \partial_j h_{ij}) + \frac{m^2}{4} (h^2 - h_{ij} h_{ij} + 2N_i N_i + 4hn) \right\}\end{aligned}\tag{B.120}$$

with

$$\mathcal{R}^{(quad)} = -\frac{1}{4} \left[(\partial_i h_{jk})(\partial_i h_{jk}) - 2(\partial_i h_{ij})(\partial_k h_{jk}) + 2(\partial_i h_{ij})(\partial_j h) - (\partial_i h)(\partial_i h) \right],\tag{B.121}$$

$$K_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{h}_{ij} - \partial_i N_j - \partial_j N_i).\tag{B.122}$$

We also used the notation $h \equiv h_{ii}$, since no confusion is possible here with the 4-trace notation. The momenta

$$\begin{aligned}\pi &= 0, \\ \pi^i &= 0, \\ \pi^{ij} &= (K^{ij} - Kg^{ij}).\end{aligned}\tag{B.123}$$

are just the linearized version of the momenta of the system (B.117). The Hamiltonian reads

$$\begin{aligned}H = \int d^3x \Big\{ \left[\left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) - \mathcal{R}^{(quad)} \right] - 2N_i \partial_j \pi^{ij} \\ + n \left(\partial_i \partial_i h - \partial_i \partial_j h_{ij} - m^2 h \right) - \frac{m^2}{4} \left(h^2 - h_{ij} h_{ij} + 2N_i N_i \right) \Big\},\end{aligned}\tag{B.124}$$

and the primary constraints are once again

$$\Phi_0 = \pi_n = 0 \quad , \quad \Phi_i = \pi_{N_i} = 0.\tag{B.125}$$

The evolution of any quantity F is then given by

$$\dot{F} = [F, H_T],\tag{B.126}$$

with $H_T \equiv H + \int d^3x (\dot{n} \Phi_0 + \dot{N}_i \Phi_i)$.

Propagation of the constraints

It's straightforward to obtain the secondary constraints

$$\Phi_4 = \partial_i \partial_i h - \partial_i \partial_j h_{ij} - m^2 h,\tag{B.127}$$

$$\Phi_{4+i} = -2\partial_j \pi^{ij} - m^2 N_i.\tag{B.128}$$

The tertiary constraints are much more painful to obtain. First, notice that

$$[\partial_j \pi^{ij}, \mathcal{R}^{(quad)}] = 0.\tag{B.129}$$

It a good exercise to see how it works: let's start with an integration by part

$$\begin{aligned}\left[\pi^{ij}(x), \int d^3y \mathcal{R}^{(quad)}(y) \right] \\ = -\frac{1}{2} \int d^3y \left\{ \delta(x-y) \left[\frac{\partial}{\partial y^k} \frac{\partial}{\partial y^l} (h_{ij}(y) \delta_{kl} - h_{ik}(y) \delta_{jl} - h_{jk}(y) \delta_{il} + h(y) \delta_{ki} \delta_{jl} + h_{kl}(y) \delta_{ij} - h(y) \delta_{kl} \delta_{ij}) \right] \right\}.\end{aligned}\tag{B.130}$$

Integrate then by part, and use the fact that $\frac{\partial}{\partial y^k} \delta(x-y) = -\frac{\partial}{\partial x^k} \delta(x-y)$ to get

$$\left[\pi^{ij}(x), \int d^3y \mathcal{R}^{(quad)}(y) \right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^l} (h_{ij}(x) \delta_{kl} - h_{ik}(x) \delta_{jl} - h_{jk}(x) \delta_{il} + h(x) \delta_{ki} \delta_{jl} + h_{kl}(x) \delta_{ij} - h(x) \delta_{kl} \delta_{ij}).\tag{B.131}$$

One can finally check that

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^j} \pi^{ij}(x), \int d^3y \mathcal{R}^{(quad)}(y) \right] = 0.\tag{B.132}$$

Note also the useful relation

$$\left[\pi, \int d^3y \mathcal{R}^{(quad)}(y) \right] = \frac{1}{2} (\partial_i \partial_i h - \partial_i \partial_j h_{ij}). \quad (\text{B.133})$$

Then, one should calculate

$$\begin{aligned} [\Phi_4, H_T] &= \left(-2\partial_k \partial_l \pi^{kl} + m^2 \pi - 2m^2 \partial_i N_i \right) \\ &= \left(-\partial_i \Phi_{4+i} + m^2 \pi - m^2 \partial_i N_i \right), \end{aligned} \quad (\text{B.134})$$

which gives the tertiary constraint (after having eliminated N_i)

$$\Phi_8 = 2\partial_i \partial_j \pi^{ij} + m^2 \pi. \quad (\text{B.135})$$

Propagating once again yields

$$[\Phi_8, H_T] = m^2 \left(\frac{3m^2}{2} h + 3m^2 n \right), \quad (\text{B.136})$$

which can be summarized into

$$\Phi_9 = 2n + h. \quad (\text{B.137})$$

Recall that $2n = -h_{00}$, so the last constraint Φ_9 is just a rewriting of the fact that the 4D trace of the graviton is null $h^\mu_\mu = 0$ outside the source, as we knew already from Eq. (2.28).

Counting of the dof

At this point, we have a clear description of the dof content of the theory. Let's first analyse the theory from a Lagrangian point of view. The fields n and N_i are not dynamical (their time derivative do not appear in the action (B.120)). In addition to these four “frozen” fields, we notice that n is a Lagrange multiplier in the action (B.120), enforcing the constraint

$$\partial_i \partial_i h - \partial_i \partial_j h_{ij} - m^2 h = 0, \quad (\text{B.138})$$

which kill an additional dof. So, only 5 Lagrangian dof remain.

From a Hamiltonian point of view, we saw that there are 10 second class constraints, each of them killing one Hamiltonian dof. It remains 10 Hamiltonian dof, or equivalently, 5 Lagrangian dof, in agreement with the Lagrangian analysis.

B.6.3 Analysis of the fully non-linear Massive Gravity

Let's now go through the Hamiltonian analysis of the constraints of the non-linear theory (B.116); the primary constraints are the same as in usual GR:

$$\Phi^0 = \pi = 0 \quad , \quad \Phi^i = \pi^i = 0 \quad , \quad (\text{B.139})$$

while the secondary constraints read

$$\Phi^4 = R^0 - m^2 h_{kk} N = 0, \quad (\text{B.140})$$

$$\Phi^{4+i} = R^i - m^2 (\eta^{ij} - h_{kk} g^{ij}) N_j = 0. \quad (\text{B.141})$$

There is no more constraint, since conservation of Φ^4 and Φ^{4+i} only leads to the expression of \dot{N} and \dot{N}_i . The main point is that the constraints are *second class*, since $[\Phi^0, \Phi^4] = 4m^2 h_{kk} \neq 0$ and $[\Phi^i, \Phi^{4+i}] = 4m^2 (\eta^{ij} - h_{kk} g^{ij}) \neq 0$. As a consequence, these 8 constraints kill 8 Hamiltonian dof out of 20, so it remains 12 Hamiltonian dof, i.e. 6 Lagrangian dof.

Thus, we see that a 6th dof starts to propagate at the non-linear level. This dof is actually a ghost, and is responsible for the Hamiltonian not being bounded from below, as shown in [49] and recalled in Sec. 2.3.2.

B.6.4 The Stückelberg mechanism in Massive Gravity

We would like now to study the “Stückelberg trick” in Massive Gravity (at quadratic order in the action). In particular, we would like to study the question of the gauge fixing, both from a Lagrangian and from a Hamiltonian point of view.

The action with the Goldstone bosons

Let’s first briefly recall how the Stückelberg fields (also sometimes called Goldstone boson) are introduced in MG; we also refer the reader to the Sec. 2.4.2. We start with the action (B.114) truncated at the quadratic order

$$\bar{S}^{(quad)} = \bar{S}_{EH}^{(quad)} - \frac{m^2}{4} \int d^4x \sqrt{-f} h_{\mu\nu} h_{\sigma\tau} (\eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\tau} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\sigma\tau}), \quad (\text{B.142})$$

where the quadratic Einstein-Hilbert action is given by

$$\bar{S}_{EH}^{(quad)} = \left(\frac{1}{2} h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\sigma h_\mu^\sigma + \frac{1}{4} h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{4} h \square h \right). \quad (\text{B.143})$$

Then, following Arkani-Hamed and al. [21], we perform the gauge-like transformation

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - 2\partial_\mu \partial_\nu \phi. \quad (\text{B.144})$$

The kinetic term is of course invariant under this diffeomorphism, but the mass term is not; the action becomes

$$\begin{aligned} \bar{S} = \bar{S}_{EH}^{(quad)} + \int d^4x \left\{ \frac{m^2}{4} [(h_\mu^\mu)^2 - h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right. \\ \left. - 4h \partial_\mu A^\mu + 4h_{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu - 4\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu \phi + 4\partial_\mu h \partial^\mu \phi] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.145})$$

As we can see, the dof are not at all diagonalized (the h ’s are mixed with ϕ). To perform a diagonalization, one can do a “Weyl Rescaling” or, to be more modest, the shift

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - m^2 \phi \eta_{\mu\nu}. \quad (\text{B.146})$$

This leads to the simplified action

$$\begin{aligned} \bar{S} = \bar{S}_{EH}^{(quad)} + \frac{m^2}{4} \int d^4x \left\{ (h_\mu^\mu)^2 - h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 4h \partial_\mu A^\mu + 4h_{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu \right. \\ \left. + 6m^2 [\phi(\square + 2m^2)\phi - h\phi + 2\phi \partial_\mu A^\mu] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.147})$$

which is now invariant under the gauge transformation

$$\begin{aligned}\delta h_{\mu\nu} &= \partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu - m^2 \Lambda \eta_{\mu\nu}, \\ \delta A_\mu &= \varepsilon_\mu - \partial_\mu \Lambda, \\ \delta \phi &= \Lambda.\end{aligned}\tag{B.148}$$

Thus, introducing the Stückelberg fields allowed us to obtain a theory with additional fields, but with a new gauge invariance. Of course, the additional fields can be fixed to zero (unitary gauge), in which case we recover the original action (B.142). However, this is not, the most interesting gauge. We'll see that it's possible to choose a gauge which separate the various dof. Before doing so, let's first turn to the Hamiltonian version of the action (B.147).

3+1 decomposition

We can now perform a 3+1 decomposition of the action

$$\begin{aligned}\bar{S} = \int d^4x \Bigg\{ & K_{ij} K^{ij} - K^2 + \mathcal{R}^{(quad)} - n(\partial_i \partial_i h - \partial_i \partial_j h_{ij}) \\ & + m^2 \left[\frac{1}{4} (h^2 - h_{ij} h_{ij}) + \frac{1}{2} N_i N_i + n h - \frac{1}{2} F_{i0} F^{i0} - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} - h \partial_i A_i + h_{ij} \partial_i A_j - 2n \partial_i A_i \right. \\ & \quad + h \partial_0 A_0 - N_i \partial_i A_0 - N_i \partial_0 A_i \\ & \quad \left. + 3m^2 \left(\frac{1}{2} \partial_0 \phi \partial_0 \phi - \frac{1}{2} \partial_i \phi \partial_i \phi + m^2 \phi^2 - n \phi - \frac{1}{2} h \phi + \phi \partial_i A_i - \phi \partial_0 A_0 \right) \right] \Bigg\}.\end{aligned}\tag{B.149}$$

The momenta are

$$\pi^{ij} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 h_{ij})} = (K^{ij} - K \delta^{ij}),\tag{B.150}$$

$$\pi^i = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A_i)} = m^2 (F_{0i} - N_i),\tag{B.151}$$

$$\pi_\phi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 \phi)} = 3m^4 \partial_0 \phi.\tag{B.152}$$

Note that these relations can be easily inverted, yielding

$$\partial_0 \phi = \frac{\pi_\phi}{3m^4},\tag{B.153}$$

$$\partial_0 h_{ij} = 2 \left(\pi_{ij} - \frac{\pi}{2} \delta_{ij} \right) + \partial_i N_j + \partial_j N_i,\tag{B.154}$$

$$\partial_0 A_i = \frac{\pi_i}{m^2} + \partial_i A_0 + N_i.\tag{B.155}$$

The five primary constraints read

$$\Phi_0 = \pi_n = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 n)} = 0, \quad (\text{B.156})$$

$$\Phi_i = \pi_{N_i} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 N_i)} = 0, \quad (\text{B.157})$$

$$\Phi_4 = \pi^0 + m^2(3m^2\phi - h) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A_0)} + m^2(3m^2\phi - h) = 0. \quad (\text{B.158})$$

Finally, the Hamiltonian can be found to be

$$\begin{aligned} H = \int d^3x \left\{ \left[\left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) - \mathcal{R}^{(quad)} \right] - 2N_i \partial_j \pi^{ij} + \frac{1}{6} \frac{\pi_\phi^2}{m^4} \right. \\ + \frac{1}{2} \frac{\pi^i \pi_i}{m^2} + N_i \pi_i + \pi_i \partial_i A_0 + n (\partial_i \partial_i h - \partial_i \partial_j h_{ij}) \\ - m^2 \left[\frac{1}{4} (h^2 - h_{ij} h_{ij}) + nh - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} - h \partial_i A_i + h_{ij} \partial_i A_j - 2n \partial_i A_i - 2N_i \partial_i A_0 \right. \\ \left. \left. + 3m^2 \left(-\frac{1}{2} \partial_i \phi \partial_i \phi + m^2 \phi^2 - n\phi - \frac{1}{2} h\phi + \phi \partial_i A_i \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.159})$$

Chain of constraints

We can now turn to the most interesting part of the analysis: the propagation of the constraints. It leads to the 10 first-class constraints

$$\Phi_0 = \pi_n \quad (\text{B.160})$$

$$\Phi_i = \pi_{N_i} \quad (\text{B.161})$$

$$\Phi_4 = \pi^0 + m^2(3m^2\phi - h) \quad (\text{B.162})$$

$$\Phi_5 = \partial_i \partial_i h - \partial_i \partial_j h_{ij} - m^2(h - 3m^2\phi - 2\partial_i A_i) \quad (\text{B.163})$$

$$\Phi_{5+i} = 2\partial_j \pi_{ij} - \pi_i - 2m^2 \partial_i A_0 \quad (\text{B.164})$$

$$\Phi_9 = \partial_i \pi_i + \pi_\phi + m^2 \pi \quad (\text{B.165})$$

The fact that the constraints are first class just reflects the gauge symmetry (B.148) of the action (B.147). We would like now to fix the gauge, in order to see how the Stückelberg fields capture the vector and scalar modes of the graviton.

Transverse gauge

Let's see first how to fix the gauge in the Lagrangian formalism in such a way that the kinetic term is diagonalized. Starting from the action (B.147), we add a gauge fixing term [201]

$$\mathcal{L}_{GF} = -2 \left(\Theta^\mu \Theta_\mu + \frac{m^2}{4} \Theta^2 \right), \quad (\text{B.166})$$

with

$$\Theta_\mu = \frac{1}{2}\partial_\nu h_\mu{}^\nu - \frac{1}{4}\partial_\mu h - \frac{1}{2}m^2 A_\mu, \quad (\text{B.167})$$

$$\Theta = \partial_\mu A^\mu - \frac{1}{2}h + 3m^2\phi. \quad (\text{B.168})$$

This leads to a “diagonalized” action:

$$\begin{aligned} \bar{S} = \int d^4x \Big\{ \frac{1}{4}h^{\mu\nu} (\Box - m^2) (h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}) \\ + \frac{m^2}{2}A_\mu (\Box - m^2) A^\mu + \frac{3}{2}m^4\phi (\Box - m^2) \phi \Big\}. \end{aligned} \quad (\text{B.169})$$

We notice that there is a “residual gauge invariance”

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &\rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \tilde{A}_\nu + \partial_\nu \tilde{A}_\mu \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu - \tilde{A}_\mu + \partial_\mu \Lambda \\ \phi &\rightarrow \phi - \Lambda, \\ \text{with } (\Box - m^2)\tilde{A}_\mu + m^2\partial_\mu \Lambda &= 0 \quad \text{and} \quad (\Box - 3m^2)\Lambda = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.170})$$

This is very similar to the Lorentz gauge residual gauge invariance for E&M that we have seen in Eq. (B.35). This means that this Lagrangian gauge is not totally fixed from a Hamiltonian point of view, and corresponds in fact to a class of Hamiltonian gauges. Let’s now try to find one representant of this class in the Hamiltonian formalism.

First of all, we shall see how $\Theta_\mu = 0$ and $\Theta = 0$ look like in a 3+1 decomposition:

$$\Theta_0 = \frac{1}{2}\partial_0 n + \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}m^2 A_0, \quad (\text{B.171})$$

$$\Theta_i = -\frac{1}{2}\partial_0 N^i + \frac{1}{2}h_{ij,j} - \frac{1}{4}h_{,j} - \frac{1}{2}n_{,i} - \frac{1}{2}m^2 A_i, \quad (\text{B.172})$$

$$\Theta = -\partial_0 A_0 + A^i{}_{,i} - n - \frac{1}{2}h + 3m^2\phi. \quad (\text{B.173})$$

Now, we would like to choose 10 constraints, in addition to the constraints (B.160)-(B.165), in order to make the system second class, and such that the gauge fixation terms (B.171)-(B.173) are satisfied. Since we want to separate the dof, and make sure that the tensor is transverse and with a non-dynamical trace, and that the vector is transverse with no scalar mode, we impose

$$\Phi_{10} = A_0 \quad (\text{B.174})$$

$$\Phi_{10+i} = \partial_i h_{ij} \quad (\text{B.175})$$

$$\Phi_{14} = \partial_i A_i \quad (\text{B.176})$$

$$\Phi_{15} = n + \frac{1}{2}h - 3m^2\phi \quad (\text{B.177})$$

$$\Phi_{15+i} = 2\partial_i \pi_{ij} - \partial_i \pi + \partial_i \partial_j N_j + \Delta N_j \quad (\text{B.178})$$

$$\Phi_{19} = \partial_i \pi_i + m^2 \partial_i N_i. \quad (\text{B.179})$$

One can then check that this represents a consistent choice of constraint. In addition, requiring the conservation of $\Phi_{10}, \Phi_{15}, \Phi_{15+i}$ leads to the constraints

$$\frac{1}{2}\partial_0 n + \frac{1}{4}\pi = 0, \quad (\text{B.180})$$

$$-\frac{1}{2}\partial_0 N^i - \frac{1}{4}h_{,j} - \frac{1}{2}n_{,i} - \frac{1}{2}m^2 A_i = 0, \quad (\text{B.181})$$

$$-\partial_0 A_0 = 0 \quad (\text{B.182})$$

which are consistent with the constraints (B.171)-(B.173), provided the constraints (B.174)-(B.179) are taken into account. To conclude, we have managed to find a set of Hamiltonian constraints which fix totally the gauge, and show explicitly how the Stückelberg trick allow to isolate the various dof originally mixed in the graviton.

Annexe C

On the unicity of the solution far from the source

Sommaire

C.1	A simple singular Cauchy problem	286
C.2	The Cauchy problem in Massive gravity in the Decoupling Limit	288
C.3	The Cauchy problem in non-linear Massive Gravity	290
C.3.1	The set of equations	290
C.3.2	Leading behavior	292
C.3.3	A series expansion approach	295
C.3.4	Numerical solution	299

In this Appendix, we would like to study the question of the unicity of the solution of the spherically symmetric equations of Massive Gravity (MG), far from the source. More precisely, let's suppose we fix the asymptotic behavior (3.61) at infinity and let's assume that there exists a solution: is this solution unique?

We have seen in Section 3.2.3 that this is not necessarily the case: depending on the mass term, the solution can be uniquely determined by its asymptotic behavior at infinity, or there can exist infinitely many solutions with the same asymptotic behavior. In this Appendix, we would like to show to give a demonstration of this result.

In the first part of this Appendix, we will introduce a simple model, which shares a lot of similarities with MG, and in particular has a singular Cauchy problem at infinity. This model will allow us to understand how the asymptotic can fix uniquely the solution in some cases, and not in others. We will then discuss the Decoupling Limit (DL) of MG in the second section, and study in a systematic way the issue of the uniqueness of the solution. The BD potential (2.42) will appear to have a unique solution, while the AGS mass term (2.43) has an infinite number of solutions with the same behavior at infinity. Finally, we will study the fully nonlinear theory and show in the specific case of the AGS potential that the solution is not uniquely defined by its asymptotic behavior.

C.1 A simple singular Cauchy problem

Let's start with a simple model, that will be very useful for understanding better the Cauchy problem at infinity in the case of MG¹. Consider the following second-order differential equations:

$$y''(x) + y(x) = \frac{1}{x}, \quad (\text{C.1})$$

$$-y''(x) + y(x) = \frac{1}{x}. \quad (\text{C.2})$$

The form of these equation is very similar to the DL equation (4.17), and thus will help to understand better the Cauchy problem in Massive Gravity (MG). In particular, these equations are singular at infinity similarly to Eq. (4.17). The term $y(x)$ and $1/x$ correspond respectively to the term linear in w and the source term $1/\xi^3$, while the second derivative of y can be related to the nonlinear differential operator Q . Aside from the fact that the differential operator of equation (C.1) and (C.2) is linear, these equations have the same structure as equation (4.17). The solution of (C.1) is given by

$$y_1(x) = \bar{A}_1 \cos(x) + \bar{B}_1 \sin(x) + \text{Ci}(x) \sin(x) - \text{Si}(x) \cos(x), \quad (\text{C.3})$$

while the solution of (C.2) is

$$y_2(x) = \bar{A}_2 e^x + \bar{B}_2 e^{-x} - \frac{1}{2} (e^x \text{Ei}(-x) - e^{-x} \text{Ei}(x)). \quad (\text{C.4})$$

In Eq. (C.3) and (C.4), \bar{A}_1 , \bar{B}_1 , \bar{A}_2 and \bar{B}_2 are arbitrary constants, and $\text{Si}(x)$, $\text{Ci}(x)$ and $\text{Ei}(x)$ are sine integral, cosine integral and exponential integral functions correspondingly, given by

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad \text{Ci}(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt, \quad \text{Ei}(x) = - \int_{-x}^\infty \frac{\exp(-t)}{t} dt.$$

Now let us find solution(s) of (C.1) and (C.2) such that,

$$y_{1,2}(x) \rightarrow \frac{1}{x}, \text{ when } x \rightarrow \infty. \quad (\text{C.5})$$

There is a unique solution of (C.1) with the asymptotic (C.5),

$$y_1(x) = \frac{\pi}{2} \cos(x) + \text{Ci}(x) \sin(x) - \text{Si}(x) \cos(x), \quad (\text{C.6})$$

while for the equation (C.2) the asymptotic behaviour (C.5) does not fix uniquely the solution,

$$y_2(x) = \bar{B}_2 e^{-x} - \frac{1}{2} (e^x \text{Ei}(-x) - e^{-x} \text{Ei}(x)). \quad (\text{C.7})$$

I.e. one has the freedom to choose at will the integration constant \bar{C}_2 . Solution (C.6) has the following asymptotic expansion

$$y_1(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{24}{x^5} - \frac{720}{x^7} + O\left(\frac{1}{x^9}\right),$$

¹This section is strongly relying on the Sec. 4.2.2 of the article [30], where the toy models (C.1) and (C.2) are introduced and analyzed in detail.

while looking for a power serie expansion of solution (C.7), we find

$$y_2(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{24}{x^5} + \frac{720}{x^7} + O\left(\frac{1}{x^9}\right).$$

Those series expansions are in fact divergent, and hence only give at best asymptotic expansions of the solution. In addition, we notice that the last one misses the existence of the homogeneous mode $\bar{B}_2 e^{-x}$.

The toy examples (C.1) and (C.2) show that for singular equations, the asymptotic behaviour at infinity can be enough to fix uniquely the solution (and hence the singular Cauchy problem is well-posed), this is the case for example of Eq. (C.1); while in other cases, such as that of Eq. (C.2), there exist a family of solutions with the same asymptotic behaviour, which can be missed by looking for the solution by a power series expansion.

Before moving to Massive Gravity, we would like to recover the properties summarized in this last paragraph through a method that would be generalizable to MG. Indeed, in MG it's not possible to find the general form of the solutions, like it was possible to do for the toy model solutions (C.6) and (C.7). Instead, one can choose the following approach. Let's suppose there exist some solution $\bar{y}_{1,2}$ to the equation (C.1) or (C.2). We would like search for another solution, different from $\bar{y}_{1,2}$ that would be of the form

$$y_{1,2} = \bar{y}_{1,2} + \delta y_{1,2}, \quad (\text{C.8})$$

where in addition we suppose

$$|\delta y_{1,2}| \ll |y_{1,2}| \quad \text{for} \quad x \rightarrow \infty. \quad (\text{C.9})$$

Plugging this ansatz into the equations (C.1) and (C.2) leads to

$$\delta y_1'' + \delta y_1 = 0, \quad (\text{C.10})$$

$$-\delta y_2'' + \delta y_2 = 0. \quad (\text{C.11})$$

The solutions of these equations are trivially found to be

$$\delta y_1 = \bar{A}_1 \cos(x) + \bar{B}_2 \sin(x), \quad (\text{C.12})$$

$$\delta y_2 = \bar{A}_2 e^x + \bar{B}_2 e^{-x}. \quad (\text{C.13})$$

Since the condition (C.9) implies that $|\delta y_{1,2}| \ll 1/x$ for $x \rightarrow \infty$, it imposes $\bar{A}_1 = \bar{B}_1 = \bar{A}_2 = 0$. As a consequence, we recover the fact that for the model (C.1), it's not possible to build a new solution out of \bar{y}_1 : the solution is unique. On the contrary, in the case of the model (C.2), there exists the freedom to build a new solution by choosing at will the constant \bar{B}_2 : instead of a unique solution, there is an infinite class of solutions.

Let's now turn our attention to the MG equations in the DL similar results can be found.

C.2 The Cauchy problem in Massive gravity in the Decoupling Limit

The equation we consider in the Decoupling Limit (DL) of Massive Gravity (MG) has been given in Eq. (4.17) and reads

$$E_w[w; \xi] \equiv 2 Q(w) + \frac{3}{2}w - \frac{1}{\xi^3} = 0, \quad (\text{C.14})$$

with

$$Q(w) = -\frac{1}{2} \left\{ 3\alpha \left(\frac{\xi}{2} \dot{w}\ddot{w} + \frac{3}{2}w\ddot{w} + 2\dot{w}^2 + \frac{6w\dot{w}}{\xi} \right) + \beta \left(\frac{3\xi}{2} \dot{w}\ddot{w} + \frac{5}{2}w\ddot{w} + 5\dot{w}^2 + \frac{10w\dot{w}}{\xi} \right) \right\}. \quad (\text{C.15})$$

We are interested in solutions which go to zero at infinity; as a consequence, their asymptotic behavior is fixed by the linear regime

$$w(\xi) \rightarrow w_0(\xi) \equiv \frac{2}{3\xi^3} \quad \text{for} \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (\text{C.16})$$

Let's suppose we know a solution \bar{w} (which of course satisfies $\bar{w} \rightarrow w_0$ for $\xi \rightarrow \infty$); we would like to know if this solution \bar{w} is unique. In order to investigate this question, we shall follow the second approach we exposed in the previous section C.1: we are going to try to build a new solution w as a perturbation of the known solution² \bar{w} , *i.e.* of the forme

$$w = \bar{w} + \delta w, \quad (\text{C.17})$$

with the constraint

$$|\delta w(\xi)| \ll |\bar{w}(\xi)| \quad \text{for} \quad \xi \rightarrow +\infty. \quad (\text{C.18})$$

Because of this last condition, it makes sense to linearize the equation (C.14) in δw ; we then obtain

$$E_w[w; \xi] = E_w[\bar{w} + \delta w; \xi] = E_w[\bar{w}; \xi] + \left. \frac{\delta E_w}{\delta w} \right|_{\bar{w}} \delta w + \mathcal{O}(\delta w^2). \quad (\text{C.19})$$

However, \bar{w} being by definition a solution of E_w , it satisfies $E_w[\bar{w}; \xi] = 0$. In addition, since $\bar{w} \rightarrow w_0$ for $\xi \rightarrow \infty$, we can replace \bar{w} by its asymptotic behavior (C.16), leading to the equation

$$\left. \frac{\delta E_w}{\delta w} \right|_{w_0} \delta w = 0, \quad (\text{C.20})$$

which can be shown to be equivalent to

$$\delta \ddot{w} + \frac{\delta \dot{w}}{\xi} + \frac{8\xi^3 \delta w}{8\beta} = 0. \quad (\text{C.21})$$

²Note that a more direct approach of the problem is possible; indeed, as shown in the Appendix C of [30], a change of variable allows to put the equation into a form which can be linearized consistently (*cf.* Eq. C.2 of [30]) and whose solutions exhibit the properties mentioned in the previous section. However, such a direct approach will not be possible in the fully non-linear case, motivating the alternative method presented in this Appendix.

This last equation is easily solved, through the change of variable

$$\xi = \left(\frac{5\sqrt{2|\beta|}}{3} \zeta \right)^{2/5}, \quad (\text{C.22})$$

which leads to the Bessel equation

$$\delta w'' + \frac{\delta w}{\zeta} + \frac{|\beta|}{\beta} \delta w = 0. \quad (\text{C.23})$$

For $\beta > 0$, the general solution of (C.23) is given by

$$\delta w(\zeta) = D_1 J_0(\zeta) + D_2 Y_0(\zeta). \quad (\text{C.24})$$

However, the condition (C.18) together with the asymptotic behavior (C.16) and the change of variable (C.22) imposes

$$|\delta w(\zeta)| \ll \zeta^{-6/5} \quad \text{for} \quad \zeta \rightarrow +\infty. \quad (\text{C.25})$$

Using the asymptotic behavior of the Bessel functions for $\xi \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} J_0(\zeta) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \zeta\right), \\ Y_0(\zeta) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \zeta\right), \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

it appears that the only possible choice of integration constants D_1 and D_2 consistent with the condition (C.25), is that they both vanish, i.e. $(D_1, D_2) = (0, 0)$. As a consequence, $\delta w = 0$ everywhere. This is similar to the example (C.1) discussed in Section C.1: the asymptotic conditions (C.18) fixes the solution uniquely.

For $\beta < 0$, the general solution of (C.23) reads

$$G(\zeta) = D_3 K_0(\zeta) + D_4 I_0(\zeta). \quad (\text{C.27})$$

Using once again the asymptotic behavior of the Bessel functions for $\xi \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} K_0(\zeta) &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}} e^{-\zeta}, \\ I_0(\zeta) &\sim \frac{e^\zeta}{\sqrt{2\pi\zeta}}, \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

we see that the condition (C.25) fixes $D_4 = 0$, while the other integration constant D_3 remains free, since the homogeneous mode $K_0(\zeta)$ decays fast enough at infinity. This is analogous to the example (C.2) discussed in Section C.1: the Cauchy problem is not well posed at infinity, and as a consequence, the asymptotic behavior for large distances is not enough for fixing uniquely the solution. Instead of a unique solution, we obtain a family of solutions parametrized by D_3 , with the same asymptotic behavior (C.16).

We would like now to see if such a result still hold in the fully non-linear Massive Gravity.

C.3 The Cauchy problem in non-linear Massive Gravity

In the fully non-linear version of massive gravity, the question of unicity of the solution becomes quite hard to tackle, because of the complexity of the equations. To keep the calculations tractable, we will focus on the AGS mass term (2.43) and show that in that case, the asymptotic behavior is not enough to fix uniquely the solution : there exist infinitely many solutions with the same behavior at infinity.

C.3.1 The set of equations

We will use in this section similar notations and equations as we used in Sec. 3.2. Though, we will repeat here some derivations for completeness, in order to make this Appendix mostly independent of the rest of the Thesis.

Following Sec. 3.2, it is convenient to introduce the dimensionless distance z as follows:

$$z = Rm^{-1}.$$

The tt and RR components of the Einstein equations (3.6) along with the Bianchi identity (3.9) read,

$$\begin{aligned} e^{\nu-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{z} + \frac{1}{z^2}(e^\lambda - 1) \right) &= f_t(\lambda, \nu, \mu', \mu, z), \\ \frac{\nu'}{z} + \frac{1}{z^2} (1 - e^\lambda) &= f_R(\lambda, \nu, \mu', \mu, z), \\ f_g(\lambda, \lambda', \nu, \nu', \mu, \mu', \mu'', z) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

where $' \equiv d/dz$; the function f_t, f_R and f_g are defined for the AGS potential in Eq. (3.12) or equivalently in Eq. (A10)-(A12) of [85].

Linearizing (C.29) we obtain,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda'}{z} + \frac{\lambda}{z^2} + \frac{1}{2}(\lambda + 3\mu + z\mu') &= 0, \\ \frac{\nu'}{z} - \frac{\lambda}{z^2} - \frac{1}{2}(\nu + 2\mu) &= 0, \\ \nu' - \frac{2\lambda}{z} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

An asymptotically flat solution of the above linear system has been found in Eq. (3.21) and reads

$$\begin{aligned} \nu_0 &= -\frac{4b}{3z}e^{-z}, \\ \lambda_0 &= \frac{2b}{3} \left(1 + \frac{1}{z} \right) e^{-z}, \\ \mu_0 &= \frac{2b}{3z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) e^{-z}, \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

where we have defined $b = (R_V m)^5 = R_S m$. Note that we have fixed the constant K of Eq. (3.21) to $K = 1$ (or equivalently the constant C of Eq. (3.61) has been fixed to

$C = 1$ like in (4.16)) so that the solution agrees with the DL behavior (4.15) in the range of distances $z \in [a \equiv R_m m, 1]$.

Now, let's assume that there is a solution of the full non-linear system of equations (C.29), $\bar{\sigma} \equiv \{\bar{\lambda}, \bar{\nu}, \bar{\mu}\}$, such that

$$\bar{\sigma} \rightarrow \sigma_0 \quad \text{for} \quad z \rightarrow \infty. \quad (\text{C.32})$$

where $\sigma_0 \equiv \{\lambda_0, \nu_0, \mu_0\}$.

We want to show that if there is one solution $\{\bar{\lambda}, \bar{\nu}, \bar{\mu}\}$, then there is an infinite number of solutions having the same asymptotic at the infinity. Let us search a new solution in the form,

$$\sigma = \bar{\sigma} + \delta\sigma, \quad (\text{C.33})$$

where $\delta\sigma \equiv \{\delta\lambda, \delta\nu, \delta\mu\}$ and we assume,

$$|\delta\sigma| \ll |\bar{\sigma}|, \quad |\delta\sigma'| \ll |\bar{\sigma}'|, \quad |\delta\sigma''| \ll |\bar{\sigma}''|. \quad (\text{C.34})$$

Taking into account (C.34), the system of equations (C.29) can be linearized around the solution $\bar{\sigma}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_t}{\partial \sigma} \Big|_{\bar{\sigma}} \delta\sigma + \frac{\partial F_t}{\partial \sigma'} \Big|_{\bar{\sigma}} \delta\sigma' &= 0, \\ \frac{\partial F_R}{\partial \sigma} \Big|_{\bar{\sigma}} \delta\sigma + \frac{\partial F_R}{\partial \sigma'} \Big|_{\bar{\sigma}} \delta\sigma' &= 0, \\ \frac{\partial f_g}{\partial \sigma} \Big|_{\bar{\sigma}} \delta\sigma + \frac{\partial f_g}{\partial \sigma'} \Big|_{\bar{\sigma}} \delta\sigma' + \frac{\partial f_g}{\partial \mu''} \Big|_{\bar{\sigma}} \delta\mu'' &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

It is important to note that in the linearized Bianchi identity, the last equation of (C.35), we do not assume that the terms containing $\delta\mu''$ are negligible, so we keep them. We are interested in asymptotic solutions at infinity, thus we can substitute σ_0 instead of $\bar{\sigma}$ in (C.35), since $\bar{\sigma} \rightarrow \sigma_0$ at $z \rightarrow \infty$.

Further, since we are considering a range of distances where the solution is deep in the linear regime, we can safely keep only the lowest order in powers of σ_0 , while making an

expansion of coefficients of equations (C.35). This leads to the equations,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\lambda'}{z} + \frac{\delta\lambda}{z^2} + \frac{1}{2}(\delta\lambda + 3\delta\mu + z\delta\mu') &= be^{-z} \left[\left(\frac{1}{3z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{2}{3z} \right) \delta\lambda + \left(\frac{2}{z^2} + \frac{2}{3z} \right) \delta\lambda' \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3z} \delta\nu + \frac{1}{z} \delta\mu + \left(-\frac{1}{2z^2} - \frac{1}{2z} + \frac{1}{3} + \frac{z}{6} \right) \delta\mu' \right], \\
\frac{\delta\nu'}{z} - \frac{\delta\lambda}{z^2} - \frac{1}{2}(\delta\nu + 2\delta\mu) &= be^{-z} \left[\left(\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} \right) \delta\lambda \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2}{3z^3} + \frac{2}{3z^2} + \frac{4}{3z} + \frac{1}{3} \right) \delta\nu \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{1}{3z} + \frac{2}{3} \right) \delta\mu + \left(-\frac{1}{3z^2} - \frac{1}{3z} \right) \delta\mu' \right], \\
\frac{\delta\nu'}{2z} - \frac{\delta\lambda}{z^2} &= \frac{be^{-z}}{z^2} \left[\left(\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{3z} + \frac{1}{3} \right) \delta\lambda + \left(\frac{1}{3z^2} + \frac{1}{3z} \right) \delta\lambda' \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2}{3z} + \frac{2}{3} \right) \delta\nu + \left(-\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{2}{3} \right) \delta\nu' \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{2}{3z} - \frac{2}{3} \right) \delta\mu + \left(\frac{1}{3z^2} + \frac{1}{3z} - \frac{1}{3} \right) \delta\mu' \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{3z} + \frac{1}{3} \right) \delta\mu'' \right]. \tag{C.36}
\end{aligned}$$

C.3.2 Leading behavior

In order to compute the leading behavior, we take the limit $z \rightarrow \infty$ in the equations (C.36); we obtain,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\lambda'}{z} + \frac{\delta\lambda}{z^2} + \frac{1}{2}(\delta\lambda + 3\delta\mu + z\delta\mu') &= \frac{be^{-z}}{3z} \delta\nu, \\
\frac{\delta\nu'}{z} - \frac{\delta\lambda}{z^2} - \frac{1}{2}(\delta\nu + 2\delta\mu) &= 0, \\
\frac{\delta\nu'}{2z} - \frac{\delta\lambda}{z^2} &= \frac{be^{-z}}{3z^2} \left(\delta\mu'' - \delta\mu' - 2\delta\mu + \frac{\delta\lambda'}{z} + 2\delta\nu \right). \tag{C.37}
\end{aligned}$$

Note that so far we did not make any assumptions about the form of $\delta\sigma$, except (C.34). If in addition one assumes that the rhs of (C.37) can be neglected, then the solution for $\delta\sigma$ will be given by (3.21) provided that the integration constant b is replaced by δb , such that $|\delta b| \ll |b|$. However in this case one should impose $\delta b = 0$ since we require $\sigma \rightarrow \sigma_0$ at $z \rightarrow \infty$, thus we do not obtain any new solution.

Instead, let us try to find another solution such that (some) terms containing e^{-z} are not negligible in (C.37). Introducing a new variable ζ as follows,

$$\zeta \equiv e^z, \tag{C.38}$$

the system of equations (C.37) can be rewritten,

$$\begin{aligned} \frac{\zeta \dot{\delta\lambda}}{\log \zeta} + \frac{\delta\lambda}{(\log \zeta)^2} + \frac{1}{2} \left(\delta\lambda + 3\delta\mu + \zeta \log \zeta \dot{\delta\mu} \right) &= \frac{b \delta\nu}{3\zeta \log \zeta}, \\ \frac{\zeta \dot{\delta\nu}}{\log \zeta} - \frac{\delta\lambda}{(\log \zeta)^2} - \frac{1}{2} (\delta\nu + 2\delta\mu) &= 0, \\ \frac{\zeta \dot{\delta\nu}}{2 \log \zeta} - \frac{\delta\lambda}{\log^2 \zeta} &= \frac{b}{3\zeta \log^2 \zeta} \left(\zeta^2 \ddot{\delta\mu} - 2\delta\mu + \frac{\zeta \dot{\delta\lambda}}{\log \zeta} + 2\delta\nu \right), \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

where dot denotes the derivative with respect to ζ . In order to simplify the system of equations (C.39) let us make further assumptions about the functions $\delta\lambda$, $\delta\nu$ and $\delta\mu$ at $\zeta \rightarrow \infty$,

$$|\delta\nu| \ll |\delta\mu| \ll \zeta |\dot{\delta\mu}| \ll \zeta^2 |\ddot{\delta\mu}| \ll \zeta^3 |\ddot{\delta\mu}|, \quad \log \zeta |\delta\lambda| \ll \zeta |\dot{\delta\lambda}| \ll \zeta |\delta\lambda|. \quad (\text{C.40})$$

The equations (C.39) then take the simpler form

$$\begin{aligned} \dot{\delta\lambda} + \frac{1}{2} (\log \zeta)^2 \dot{\delta\mu} &= 0, \\ \dot{\delta\nu} - \frac{\delta\lambda}{\zeta \log \zeta} - \frac{\log \zeta}{\zeta} \delta\mu &= 0, \\ \ddot{\delta\mu} + \frac{3}{2b\zeta} \left(2\delta\lambda - \zeta \log \zeta \dot{\delta\nu} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

These equations can be combined to give one differential equation on μ ,

$$\zeta \ddot{\delta\mu} + \ddot{\delta\mu} - \frac{9}{4b} (\log \zeta)^2 \dot{\delta\mu} - \frac{3 \log \zeta}{b\zeta} \delta\mu = 0, \quad (\text{C.42})$$

which — applying the assumptions (C.40) — can be rewritten as,

$$\ddot{\delta\mu} - \frac{9}{4b\zeta} (\log \zeta)^2 \dot{\delta\mu} = 0. \quad (\text{C.43})$$

The asymptotic form of the decaying solution of Eq. (C.43) can be easily guessed,

$$\delta\mu = F_\infty(\zeta) \exp \left(-3\sqrt{\frac{\zeta}{b}} \log \zeta \right), \quad \text{for } \zeta \rightarrow \infty, \quad (\text{C.44})$$

where $F_\infty(\zeta)$ is a function that cannot be fixed through this leading behavior analysis; however, it should be subdominant, and so

$$|\log (|F_\infty(\zeta)|)| \ll \left| 3\sqrt{\frac{\zeta}{b}} \log \zeta \right|. \quad (\text{C.45})$$

Note that a companion growing mode can also be considered

$$\delta\mu = F_\infty^{(grow)}(\zeta) \exp \left(3\sqrt{\frac{\zeta}{b}} \log \zeta \right), \quad \text{for } \zeta \rightarrow \infty, \quad (\text{C.46})$$

which is fixed to zero by the conditions (C.34); this growing mode can play an important rôle while integrating the equations of motion *à la* Runge-Kutta, since it can blow up very rapidly (as exponent of exponent) if sourced by numerical errors. This explain the difficulty one encounters (*cf.* Sec. 4.1.6) while trying to integrate the equations of motion for distances beyond R_V for the AGS (2.43) potential. For the rest of this Appendix, we will discard such a term since it contradicts the boundary conditions at infinity, but one should keep in mind its possible existence when solving the equations numerically.

From (C.41) one can find other functions at $\zeta \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}\delta\lambda &= -F_\infty(\zeta) \frac{(\log \zeta)^2}{2} \exp\left(-3\sqrt{\frac{\zeta}{b}} \log \zeta\right), \\ \delta\nu &= -F_\infty(\zeta) \frac{\sqrt{b}}{3} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \exp\left(-3\sqrt{\frac{\zeta}{b}} \log \zeta\right).\end{aligned}\tag{C.47}$$

Finally, one can check that the assumptions (C.34) and (C.40) are satisfied for the solutions (C.44), (C.47) as $\zeta \rightarrow \infty$ ($z \rightarrow \infty$). In terms of the variable z , equations (C.44) and (C.47) read

$$\begin{aligned}\delta\mu &= F_\infty(z) \exp\left(-\frac{3}{\sqrt{b}} z e^{z/2}\right), \\ \delta\lambda &= -F_\infty(z) \frac{z^2}{2} \exp\left(-\frac{3}{\sqrt{b}} z e^{z/2}\right), \\ \delta\nu &= -F_\infty(z) \frac{\sqrt{b}}{3} \exp\left(-\frac{z}{2} - \frac{3}{\sqrt{b}} z e^{z/2}\right),\end{aligned}\tag{C.48}$$

where

$$|F_\infty(z)| \ll \exp\left(-\frac{3}{\sqrt{b}} z e^{z/2}\right)\tag{C.49}$$

Thus we have shown that apart from the solution $\bar{\lambda}$, $\bar{\nu}$ and $\bar{\mu}$, there is at least one family of asymptotic solutions at $z \rightarrow \infty$, parametrized by the function F_∞ , and given by

$$\begin{aligned}\lambda &= \bar{\lambda} + \delta\lambda, \\ \nu &= \bar{\nu} + \delta\nu, \\ \mu &= \bar{\mu} + \delta\mu.\end{aligned}\tag{C.50}$$

Note, that the difference between solutions decays extremely fast — as a double exponent — as $z \rightarrow \infty$.

C.3.3 A series expansion approach

The ansätze

We would like to go beyond this leading order and find a consistent way of looking for the solution through a series expansion. To do so, we start from the ansätze

$$\begin{aligned}\delta\mu &= F_\mu(z) \exp\left(\frac{z}{4} - f(z) e^{z/2}\right), \\ \delta\lambda &= -F_\lambda(z) \frac{z^2}{2} \exp\left(\frac{z}{4} - f(z) e^{z/2}\right), \\ \delta\nu &= -F_\nu(z) \frac{\sqrt{b}}{3} \sqrt{1 + \frac{1}{z}} \exp\left(-\frac{z}{4} - f(z) e^{z/2}\right),\end{aligned}\tag{C.51}$$

where the function f is assumed to satisfy the equation

$$f'(z) = \frac{3z^{3/2}}{2\sqrt{b(1+z)}} - \frac{f(z)}{2},\tag{C.52}$$

whose formal solution reads

$$f(z) = e^{-z/2} \int_{z_0}^z \frac{3 t^{3/2}}{2\sqrt{b(1+t)}} e^{t/2} dt.\tag{C.53}$$

The exact choice of the lower integral bound z_0 does not matter so much, since it will just translate into an overall constant factor in Eqs (C.51). An asymptotic expansion of the solution can be easily found to be

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{b}} \left(3z - \frac{15}{2} + \frac{9}{8z} + \dots \right).\tag{C.54}$$

Note that the leading behavior of the ansätze (C.51) matches the asymptotic behavior (C.48).

The equations

Once the ansätze (C.51) has been chosen, we can compute the equations for the F_i 's. They read³

$$\begin{aligned}E_t &\equiv E_t^{(0)} + \left(\sqrt{b}e^{-z/2}\right) E_t^{(1)} + (be^{-z}) E_t^{(2)} + \left(b^{3/2}e^{-3z/2}\right) E_t^{(3)} + (b^2e^{-2z}) E_t^{(4)} = 0, \\ E_R &\equiv E_R^{(0)} + \left(\sqrt{b}e^{-z/2}\right) E_R^{(1)} + (be^{-z}) E_R^{(2)} + \left(b^{3/2}e^{-3z/2}\right) E_R^{(3)} = 0, \\ E_B &\equiv E_B^{(0)} + \left(\sqrt{b}e^{-z/2}\right) E_B^{(1)} + (be^{-z}) E_B^{(2)} + \left(b^{3/2}e^{-3z/2}\right) E_B^{(3)} = 0,\end{aligned}\tag{C.55}$$

³Note that we have multiplied the tt equation by a factor $\sqrt{b}e^{-z/2}$ in order to have consistent form among the three equations.

with

$$\begin{aligned}
E_t^{(0)} [F_i] &\equiv \frac{3z^{5/2}}{4\sqrt{z+1}} [F_\lambda(z) - F_\mu(z)], \\
E_t^{(1)} [F_i] &\equiv -\frac{1}{8} [2(z^2 + z + 12) F_\lambda(z) + 4zF'_\lambda(z) - (12 + z)F_\mu(z) - 4zF'_\mu(z)], \\
E_t^{(2)} [F_i] &\equiv \frac{1}{4\sqrt{z}\sqrt{z+1}} [-2z^2(z+3)F_\lambda(z) + (z^3 + 2z^2 - 3z - 3) F_\mu(z)], \\
E_t^{(3)} [F_i] &\equiv -\frac{1}{24z^2} [(6z^3 - 10z^2 - 52z)F_\lambda(z) - (8z^3 + 24z^2)F'_\lambda(z) \\
&\quad + (z^3 + 2z^2 + 21z - 3)F_\mu(z) + (4z^3 + 8z^2 - 12z - 12)F'_\mu(z)], \\
E_t^{(4)} [F_i] &\equiv \frac{1}{9z^2} \sqrt{z^2 + z} F_\nu(z), \\
E_R^{(0)} [F_i] &\equiv \frac{1}{2} [F_\lambda(z) + F_\nu(z) - 2F_\mu(z)], \\
E_R^{(1)} [F_i] &\equiv \frac{1}{12z^{5/2}\sqrt{z+1}} [(2z^3 + 3z^2 + z + 2) F_\nu(z) \\
&\quad - 4(z^2 + z)F'_\nu(z) - 6(z^3 + z^2)F_\mu(z)], \\
E_R^{(2)} [F_i] &\equiv \frac{1}{12z^2} [6z(1+z)F_\lambda(z) + (1+5z-8z^2)F_\mu(z) + 4(1+z)F'_\mu(z)], \\
E_R^{(3)} [F_i] &\equiv \frac{1}{9z^{7/2}\sqrt{z+1}} [(z^4 + 5z^3 + 6z^2 + 4z + 2)F_\nu(z)], \\
E_B^{(0)} [F_i] &\equiv \frac{1}{4} [2F_\lambda(z) + F_\nu(z) - 3F_\mu(z)], \\
E_B^{(1)} [F_i] &\equiv -\frac{1}{24\sqrt{z^5(z+1)}} [-6(z^2 + z^2)F_\lambda(z) + (z^2 + z + 2) F_\nu(z) - 4(z + z^2)F'_\nu(z) \\
&\quad + (36z + 30)F_\mu(z) + 24(z + z^2)F'_\mu(z)], \\
E_B^{(2)} [F_i] &\equiv \frac{1}{48z^4} [2z(4z^3 - 7z^2 + 21z + 20) F_\lambda(z) + (8z^3 + 8z^2)F'_\lambda(z) \\
&\quad + 8z(2z^2 + 3z + 3) F_\nu(z) + (35z^2 + 27z - 4)F_\mu(z) \\
&\quad + (8z^2 - 24z - 16)F'_\mu(z) - 16(z^2 - 16z)F''_\mu(z)], \\
E_B^{(3)} [F_i] &\equiv \frac{1}{36z^5\sqrt{z(z+1)}} [(10z^4 + 21z^3 + 18z^2 + 9z + 6) F_\nu(z) \\
&\quad - 4z(2z^3 + 5z^2 + 6z + 3)F'_\nu(z)]. \tag{C.56}
\end{aligned}$$

Note that we have used Eq. (C.52) to eliminate f' and f'' ; surprisingly enough, the equations (C.56) do not contain f either.

Expansion in powers of $\sqrt{b}e^{-z/2}$

The next step is to solve for the functions F_i . To do so, let's assume they are of the form

$$F_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_i^{(n)}(z) \left(\sqrt{b} e^{-z/2} \right)^n \tag{C.57}$$

with $F_i^{(n)}(z)$ at most polynomial, i.e.

$$F_i^{(n)}(z) = \mathcal{O}\left(z^{p_i^{(n)}}\right), \quad (\text{C.58})$$

and solve the equations (C.36) order by order in $\sqrt{b}e^{-z/2}$.

0-th order A priori, out of the three equations (C.55), one can get the three 0-th order equations for $F_i^{(0)}$

$$E_k^{(0)} \left[F_i^{(0)} \right] = 0, \quad (\text{C.59})$$

where $k = \{t, R, B\}$ and $i = \{\lambda, \nu, \mu\}$. However, only two of them are independent. To see this more algebraically, one can write the 0-th order equations in a matrix form

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{F}^{(0)} = 0 \quad (\text{C.60})$$

where

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{3z^{5/2}}{4\sqrt{z+1}} & 0 & -\frac{3z^{5/2}}{4\sqrt{z+1}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{F}^{(0)} = \begin{pmatrix} F_\lambda^{(0)} \\ F_\nu^{(0)} \\ F_\mu^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.61})$$

The vector $\mathbf{V}_{Ker} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{z+1}} \\ \frac{3z^{3/2}}{\sqrt{z+1}} \\ -\frac{6z^{3/2}}{\sqrt{z+1}} \end{pmatrix}$ belongs to the kernel of \mathbf{M}^\top , while the vectors

$$\mathbf{V}_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{z+1}}{3z^{5/2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_\nu = \begin{pmatrix} -\frac{4\sqrt{z+1}}{3z^{5/2}} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.62})$$

can be used to get the equations

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_\lambda^\top \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{F}^{(0)} &= F_\lambda^{(0)}(z) - F_\mu^{(0)}(z) = 0, \\ \mathbf{V}_\nu^\top \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{F}^{(0)} &= F_\nu^{(0)}(z) - F_\mu^{(0)}(z) = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.63})$$

The fact that \mathbf{M} is of rank 2 is a direct consequence of the ansätze (C.51), and in particular of the differential equation (C.52) satisfied by f . More precisely, if one does not assume anything on the function f , and then computes the 0-th order equations out of the ansätze (C.51), they are still of the homogeneous form $\mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^{(0)} = 0$, but with the matrix \mathbf{N} given by

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{b}}{4} z (f(z) + 2f'(z)) & 0 & -\frac{\sqrt{b}}{4} z (f(z) + 2f'(z)) \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{b}\sqrt{z(z+1)}(f(z)+2f'(z))}{6z^2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{b}\sqrt{z(z+1)}(f(z)+2f'(z))}{12z^2} & -\frac{b(z+1)(f(z)+2f'(z))^2}{12z^3} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.64})$$

In order to have \mathbf{N} of rank 2 (otherwise $\mathbf{F}^{(0)}$ is trivially 0), it is necessary to impose that its determinant is 0. If in addition we require f to be positive, the condition $\det \mathbf{N} = 0$ translates into the differential equation (C.52).

To conclude, we have found that the 0-th order equations are not enough to fix the $F_i^{(0)}$'s; however, they allow to understand the origin of the condition (C.52) and enforce $F_\lambda^{(0)}(z) = F_\nu^{(0)}(z) = F_\mu^{(0)}(z)$. We now have to go to next order to solve for $F_\mu^{(0)}(z)$.

First order The first order equations read

$$E_k^{(0)}[F_i^{(1)}] + E_k^{(1)}[F_i^{(0)}] = 0. \quad (\text{C.65})$$

Let's first project this set of equations onto the Kernel vector \mathbf{V}_{Ker} , since we know this procedure will cancel the $E_k^{(0)}[F_i^{(1)}]$ contribution:

$$\mathbf{V}_{\text{Ker}}^\top \cdot \mathbf{E}^{(1)}[F_i^{(0)}] = \frac{3\sqrt{b}}{2z(z+1)} \left[(6z+5)F_\mu^{(0)}(z) + 4z(z+1)F_\mu^{(0)'}(z) \right] = 0 \quad (\text{C.66})$$

where we have used the relations (C.63) to replace F_λ, F_ν by F_μ . The equation (C.66) can be straightforwardly solved, leading to

$$F_\lambda^{(0)}(z) = F_\nu^{(0)}(z) = F_\mu^{(0)}(z) = \frac{A}{z^{5/4}(1+z)^{1/4}}, \quad (\text{C.67})$$

with A being an arbitrary integration constant. A few remarks can be made at this point. First, the arbitrariness of the constant A explicitly shows that out of a solution $\bar{\sigma}$ of the system of equations (C.29), it is possible to find a family of infinite number of new solutions, with the same asymptotic behavior at infinity. Second, we note that $F_i^{(0)} = \mathcal{O}(z^{-3/2})$, in agreement with the condition (C.58).

Let's turn now to the two other first order equations. Projecting Eq. (C.68) onto \mathbf{V}_λ and \mathbf{V}_ν leads to

$$\begin{aligned} F_\lambda^{(1)}(z) - F_\mu^{(1)}(z) - \frac{1}{3}\sqrt{1+\frac{1}{z}} F_\mu^{(0)}(z) &= 0, \\ F_\nu^{(1)}(z) - F_\mu^{(1)}(z) + \frac{-2z^3 - z^2 + z + 2}{6\sqrt{z^5(z+1)}} F_\mu^{(0)}(z) - \frac{4z^2 + 4z}{6\sqrt{z^5(z+1)}} F_\mu^{(0)'}(z) &= 0. \end{aligned}$$

These equations allow to replace $F_\lambda^{(1)}$ and $F_\nu^{(1)}$ by $F_\mu^{(1)}$ in the equations of order 2. These order 2 equations will lead to an equation for $F_\mu^{(1)}$, and two other equations relating $F_\lambda^{(2)}$ and $F_\nu^{(2)}$ to $F_\mu^{(2)}$, and so on and so forth.

n -th order The n -th order equations read

$$E_k^{(0)}[F_i^{(n)}] + E_k^{(1)}[F_i^{(n-1)}] + E_k^{(2)}[F_i^{(n-2)}] + E_k^{(3)}[F_i^{(n-3)}] + E_k^{(4)}[F_i^{(n-4)}] = 0. \quad (\text{C.68})$$

By iteration, it is possible to prove that

$$F_\lambda^{(n)}(z) \sim F_\nu^{(n)}(z) \sim F_\mu^{(n)}(z) = \mathcal{O}(z^{-3/2+n}). \quad (\text{C.69})$$

We can sketch briefly how the demonstration goes: after having solved the equation of order n , the functions $F_i^{(n-1)}$ are assumed to be known, and $F_\lambda^{(n)}, F_\nu^{(n)}$ can be expressed as functions of $\{F_\mu^{(n)}, F_i^{(n-1)}\}$. Then, projecting the equations of order $n+1$ onto \mathbf{V}_{Ker} allows to find $F_\mu^{(n)}$, leading to the scaling (C.69). Projecting onto \mathbf{V}_λ and \mathbf{V}_ν relates $F_\lambda^{(n+1)}$ and $F_\nu^{(n+1)}$ to $F_\mu^{(n+1)}$, closing the iteration process.

To summarize the findings of this section, we can say that we have found a class of solutions for the system of equations (C.36). These solutions are of the form (C.51), where the functions F_i can be expanded into the series of Eq. (C.57). There are an infinite number of such solutions. This shows that out of a solution $\bar{\sigma}$ of the system of equations (C.29), it is possible to find a family of infinite number of new solutions, with the same asymptotic behavior at infinity. This freedom will be crucial to match the only physical solution within the start: the Vainshtein's solution.

C.3.4 Numerical solution

To conclude this study of infinitely many solutions satisfying the same boundary conditions at infinity, let's check that our solution (C.51) fits well the numerical solution of the system of equations (C.36). An example is shown in Fig. C.1, and it is found that our analytical solution fits extremely well the numerical solution.

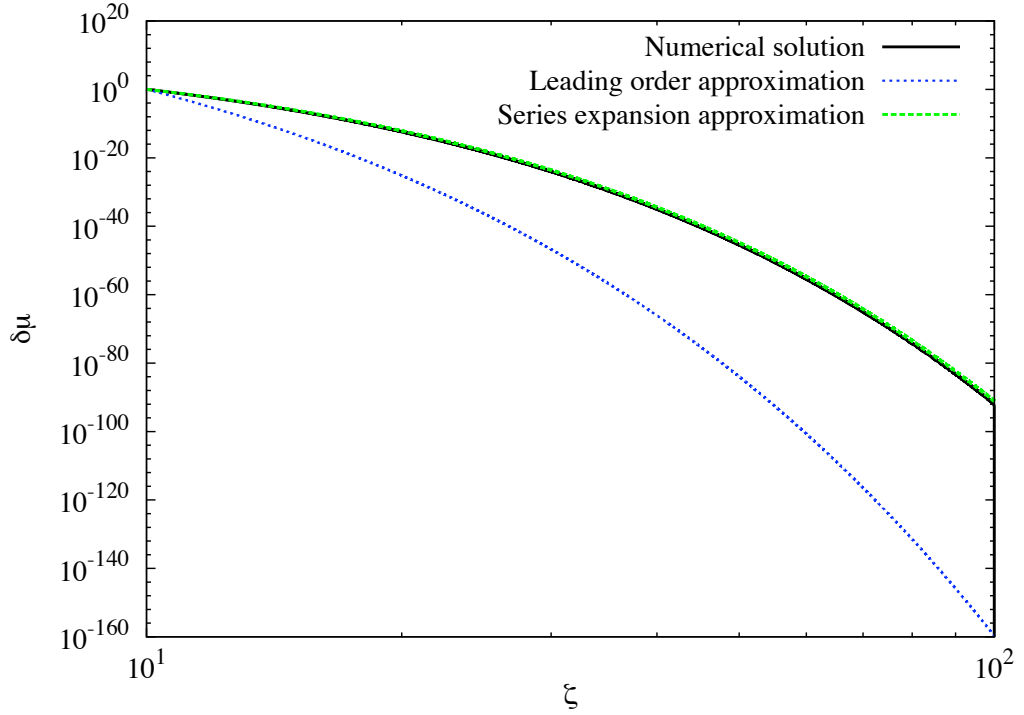


Figure C.1: Plot of the numerical solution for $\delta\mu(\zeta)$ for $b = 0.1$ and $\delta\mu(\zeta = 10) = 1$. We also plotted the leading behavior $\delta\mu(\zeta) = \exp\left(-3\sqrt{\frac{\zeta}{b}} \log \zeta\right)$ of Eq. (C.44), and the first series expansion correction obtained from Eq. (C.54) and Eq. (C.67). In terms of the ζ variable, this first order series expansion expression reads $\delta\mu(\zeta) = \frac{1}{(\log \zeta)^{5/4}(1+\log \zeta)^{1/4}} \exp\left(\frac{\log \zeta}{4} - \frac{1}{\sqrt{b}} \left(3 \log \zeta - \frac{15}{2} + \frac{9}{8 \log \zeta}\right) \sqrt{\zeta}\right)$. One can see that while the leading behavior already encodes the main behavior (exponentially decreasing $\delta\mu(\zeta)$), the first correction coming from the series expansion improves greatly the agreement with the numerical solution, confirming our analytical analysis of the system (C.36).

Annexe D

Some details about Numerics

Sommaire

D.1 Principle of the numerical methods	301
D.1.1 Runge-Kutta integration (shooting method)	302
D.1.2 Relaxation method	303
D.1.3 Comparison between the two methods	304
D.2 Rescaling of the variables and asymptotic behavior	305
D.2.1 Rescaling of variables	305
D.2.2 Asymptotic behavior	306
D.3 Shooting method	306
D.3.1 Numerical integration in the DL	306
D.3.2 Numerical integration the full system	308
D.4 Relaxation method	310

D.1 Principle of the numerical methods

In our numerical solving of the equations of motion of Massive Gravity (MG), we have used two complementary methods: a direct integration *à la Runge-Kutta* and a relaxation method. We would like to present very schematically the principle of these two methods and their respective advantages. For the sake of this introduction, we will consider how to solve the simple differential equation:

$$y'(x) = f[x, y(x)], \quad (\text{D.1})$$

in the range of distances $[x_i, x_f]$. f is some function which will be assumed perfectly regular but possibly nonlinear. We will also require a boundary condition at the point x_i

$$y(x_i) = y_0. \quad (\text{D.2})$$

D.1.1 Runge-Kutta integration (shooting method)

Let's present briefly the principle of the shooting method. For more details, we refer the reader to the Chapter 17 of [218].

Euler's method

All the shooting methods are based on the Euler's method which consists in discretizing the differential equation and integrating step by step. Let's see how it works on the example of Eq. (D.1). The main idea is to discretize the x coordinate into N steps of size

$$\Delta x \equiv \frac{x_f - x_i}{N}. \quad (\text{D.3})$$

If we define

$$x_k = x_0 + k\Delta x, \quad (\text{D.4})$$

and

$$y_k \equiv y(x_k), \quad (\text{D.5})$$

we can get y_{k+1} through the formula

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)\Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (\text{D.6})$$

Starting from y_0 for $k = 0$, we can compute y_1 , and then y_2 and so on and so forth. In the limit $\Delta x \rightarrow 0$, the obtained solution tends towards the true solution.

Runge-Kutta improvement

It is actually possible to do much better than this naïve Euler's method. Obviously, the Euler's method is not symmetrical: in order to compute y_{k+1} , it only uses information at x_k and nothing between the two points. A possible improvement consists in incorporating some information on what is going on in the middle of the interval $[x_k, x_{k+1}]$. Consider for example

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k)\Delta x, \\ k_2 &= f\left(x_k + \frac{1}{2}\Delta x, y_k + \frac{1}{2}k_1\right)\Delta x, \\ y_{k+1} &= y_k + k_2 + \mathcal{O}(\Delta x^3). \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

This way of computing y_{k+1} has a precision which is improved compared to the Euler's method (D.6): we have managed to obtain a *second order* method¹, which is called *second order Runge-Kutta* method. Of course, it is possible to go beyond second order, thanks to more and more complicated combinations. For example, the fourth-order Runge-Kutta, whose definition is given in Eq. 17.1.3 of [218], is commonly used for usual numerical integrations.

In addition to the method of integration, one needs to choose a way of estimating the error, in order to decide when the solution is precise enough. Computing an error is also

¹A method is called of n th order if its error term is $\mathcal{O}(\Delta x^{n+1})$.

needed if one wants to adapt the step size dynamically. This error is computed by comparing at each point the value of y_{k+1} obtained out of y_k using different methods or different step sizes. The step size is decreased until the numerical solution is independent enough of the way it is computed: the solution is then considered as a good representation of the true solution.

In our study of MG, we have used the *Mathematica* built-in integrator `NDSolve`. *Mathematica* offers various method for integrating the differential equations [280], including the Runge-Kutta method. In our integrations, we have both let *Mathematica* choose the method of its choice, or imposed the Runge-Kutta method², without noticing any difference in the obtained solution. For all our numerical integrations, we have always checked that the solution was independent of the precision (our typical choice for the `WorkingPrecision` parameter was of order 40) and of the starting point of integration.

D.1.2 Relaxation method

The principle of the Relaxation method differs considerably from the shooting method, apart from the fact that it is also based on the discretizations (D.4) and (D.5). The basic idea of the relaxation method consists in choosing a configuration for the $\{y_i\}$'s, and then deforming it until the discretized version of the Eq. (D.1)

$$E_k[\{y_i\}] \equiv \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta y} - f\left(\frac{1}{2}(x_k + x_{k-1}), \frac{1}{2}(y_k + y_{k-1})\right) = 0 \quad (\text{D.8})$$

is satisfied with a good enough precision. The advantage of the relaxation approach is that boundary conditions can be easily enforced. Note that we have considered here a trivial example with only one boundary condition $y_{k=0} = y_0$, but it works the same way for more complicated setups, with more equations and more boundary conditions. In particular, relaxation method allows to fix boundary conditions at different points, for example at the two ends of the interval on which we want to solve the equations. This flexibility in the boundary conditions fixing makes this method very well fitted for static solution studies in which we want to impose conditions both in the center and very far from the source.

Of course, the main question is to decide how to deform the $\{y_i\}$'s configuration at each iteration. The process goes as follows. Consider for example the configuration $\{y_i^{(n)}\}$ after n iterations. We would like the $n + 1$ th configuration to be a solution of Eq. (D.8), *i.e.*

$$E_k[\{y_i^{(n+1)}\}] = 0. \quad (\text{D.9})$$

If we define $y_k^{(n+1)} \equiv y_k^{(n)} + \Delta y_k^{(n)}$, and linearize the above equation in $\Delta y_k^{(n)}$, we get

$$E_k[\{y_i^{(n+1)}\}] = E_k[\{y_i^{(n)} + \Delta y_k^{(n)}\}] \approx E_k[\{y_i^{(n)}\}] + \left. \frac{\delta E_k}{\delta y_k} \right|_{\{y_i^{(n)}\}} \Delta y_k^{(n)} = 0, \quad (\text{D.10})$$

²The integration method can be specified to the *Mathematica* integrator `NDSolve` to be the Runge-Kutta method with the command `Method → "ExplicitRungeKutta"`.

from which we can extract for $k > 0$

$$\Delta y_k^{(n)} \equiv - \left(\frac{\delta E_k}{\delta y_k} \Big|_{\{y_i^{(n)}\}} \right)^{-1} E_k[\{y_i^{(n)}\}]. \quad (\text{D.11})$$

In addition, since we assume that the boundary condition is already satisfied in $k = 0$, we choose

$$\Delta y_{k=0}^{(n)} = 0. \quad (\text{D.12})$$

These two last equations tell us how to define the $\{y_i^{(n+1)}\}$'s out of the $\{y_i^{(n)}\}$'s. Note that the definition (D.11) provides a convenient measure of the error

$$\text{error}^2 = \frac{1}{N} \sum_k |\Delta y_k^{(n)}|^2. \quad (\text{D.13})$$

The iteration process is assumed to have converged when the error is below some desired precision.

Of course, in relaxation method, the initial guess $\{y_k^{(0)}\}$ plays a crucial rôle, since it needs to be close enough to the true solution so that the process converges towards it. That is the reason why it is very useful in MG to first find the Decoupling Limit (DL) solution: we can use it as a starting point for the resolution of the fully nonlinear MG equations.

In our study of MG, we have implemented the relaxation method described in [218], using the C++ language. We typically used a grid of $N \sim 5 \times 10^4$ points and aimed at a precision of 10^{-6} . We always checked that our numerical solutions were stable under the change of the step size of the grid and the precision.

D.1.3 Comparison between the two methods

To conclude this brief presentation of the Runge-Kutta and relaxation methods, we would like to present some advantages of each methods, based on our practice of the solving of MG equations of motion.

The relaxation method has proven to be very efficient to handle the highly unstable solution of MG for the AGS mass term (2.43). Indeed, we explained in Section 4.1.6 and Appendix C that any perturbation around the solution blows up very rapidly because of the presence of an exponentially growing perturbation mode (*cf.* Eqs. (C.27) and (C.46)); this instability makes the Runge-Kutta integration very delicate: one has to tune the initial conditions extremely finely to avoid picking up this growing mode through numerical errors. In contrast, the relaxation method is insensitive to this growing mode since the method allows to enforce boundary conditions very far from the source, guarantying the cancellation of this blowing mode. As a consequence, the relaxation method allows to solve the equations of motion on a much larger interval (typically $[R_{\min} = 0; R_{\max} \sim 100 R_V]$) than the Runge-Kutta method (for which R typically runs between $R = 10^{-5} R_V$ and $R \sim 3 R_V$).

However, the relaxation method is not adapted to all the mass terms. In particular, it is very hard to obtain that way a solution for the BD (2.42) mass term. This is due to the

presence of two oscillatory perturbation modes which replace in the BD case the decaying and growing perturbation modes (C.44) and (C.46) of the AGS potential (*cf.* Eq. (C.24) for an explicit expression of these oscillatory modes in the DL). These modes are not well managed by the relaxation method: because of the averaging $(y_k + y_{k-1})/2$ in (D.8), an oscillatory solution can be considered as a valid solution by the error estimator, while being in contradiction with the asymptotic behavior (3.61) at infinity. As a consequence, for the BD case, it is much more relevant to use a direct Runge-Kutta approach (which is stable in this case, since no exploding mode is present).

The last aspect of comparison between the two methods we would like to evoke is reliability. Indeed, even if both methods are reliable³, it seems to us that a solution found through the Runge-Kutta method is in some sense more convincing than a solution obtained by relaxation. More precisely, the relaxation method is supposed to converge towards a solution that satisfies the equations everywhere; however, this is only up to some precision, fixed by the user. As a consequence, a numerical solution that would satisfy the equations at every point but one (e.g. if there is a jump at that point) could be considered as valid by the convergence scheme, if the required precision is loose enough. It thus means that the relaxation method does not necessarily converge toward an everywhere smooth solution. Of course, one can check *a posteriori* that the obtained solution is smooth enough. Still, since the Runge-Kutta does not have this issue, we have found useful to cross-check our relaxation method when possible by recovering the solution using a Runge-Kutta method⁴.

D.2 Rescaling of the variables and asymptotic behavior

D.2.1 Rescaling of variables

While dealing with numerics, it is important to work with dimensionless variables; in addition, we would like to choose variables in which the DL can be easily taken. This is precisely the aim of the rescaling (4.6), which reads

$$\left. \begin{aligned} \xi &\equiv R/R_V \\ \rho_a &\equiv 4\pi \frac{R_V^3}{M} \rho \\ P_a &\equiv 4\pi \frac{R_V^3}{M} P \end{aligned} \right| \begin{aligned} w(\xi) &\equiv a^{-2} \mu \\ v(\xi) &\equiv a^{-4} \nu \\ u(\xi) &\equiv a^{-4} \lambda, \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

where we have introduced the dimensionless parameter

$$a \equiv R_V m = (R_{Sm})^{1/5}. \quad (\text{D.15})$$

³One can check that a method is reliable by e.g. checking that the obtained solution is stable under the change of the required precision and step size.

⁴Of course, we could not span the whole relaxation method range of distances using Runge-Kutta integration, since it's not really possible to integrate much further than $R \sim 3R_V$ by direct integration because of the numerical instabilities previously evoked. However, we checked the agreement of the two methods on the overlapping range of distances, confirming that way the validity of the relaxation method. Note that for distances much larger than R_V one can check the validity of the relaxation solution by comparing it to the asymptotic behavior (3.61).

D.2.2 Asymptotic behavior

Using the above rescaling, it is easy to translate the asymptotic behavior (3.61) in terms of these rescaled variables

$$\begin{aligned} w_\infty(\xi) &= \frac{2}{3} \frac{a^2}{\xi} \left(1 + \frac{1}{a\xi} + \frac{1}{(a\xi)^2} \right) e^{-a\xi}, \\ u_\infty(\xi) &= \frac{2a}{3} \left(1 + \frac{1}{a\xi} \right) e^{-a\xi}, \\ v_\infty(\xi) &= -\frac{4}{3} \frac{e^{-a\xi}}{\xi} \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

All our solutions are required to satisfy these asymptotic behavior at infinity.

D.3 Shooting method

We have been able to solve numerically the system of MG equations using a shooting method, both in the Decoupling Limit and in the fully nonlinear theory. We will focus here on the AGS (2.43) mass term case, since it exemplifies the numerical difficulties one can encounter.

As we previously said, the shooting approach, which is based on a direct Runge-Kutta integration, appears to be quite difficult to implement in the AGS case because of the numerical instabilities that appear for distances beyond the Vainshtein radius. As a consequence of these instabilities, the initial conditions need to be extremely finely tuned. Nevertheless, we have been able to integrate the system of equations outward from a point deep inside the star up to a point further than the Vainshtein radius (typically $\xi \equiv R/R_V \sim 3$). We have also been able to integrate inward starting from a point far from the source (*e.g.* $\xi \equiv R/R_V \sim 3$) up to the core of the source. In all the integrations, we have made an extensive use of series expansions of the solution in order to fix the initial conditions as well as possible. In order to be able to obtain a wide enough range of integration (typically, $\xi \equiv R/R_V$ runs from $\xi = 10^{-5}$ and $\xi \sim 3$), the required relative precision on the initial conditions is usually of order 10^{-8} and often even more stringent.

In the next paragraphs, we give some details about these integrations, both in the DL and in the general cases.

D.3.1 Numerical integration in the DL

Integration inward starting from $R > R_V$

The most intuitive initial conditions for numerical integration is to start from large distance, where the asymptotic behavior is known, and integrate inward. For example, it is possible to fix w, \dot{w}, u, v at some distance $\xi_i \equiv R_i/R_V \sim 3$ using the asymptotic expansions $u_{inf}, v_{inf}, w_{inf}$ given in Eqs. (4.22) and (4.23). For w , this expansion was given in Eq. (4.24) and reads in the AGS case

$$w_{inf}(\xi) = \frac{2}{3\xi^3} + \frac{4}{3\xi^8} + \frac{1024}{27\xi^{13}} + \frac{712960}{243\xi^{18}} + \frac{104910848}{243\xi^{23}} + \frac{225030664192}{2187\xi^{28}} + \dots \quad (\text{D.17})$$

We have seen in Sec. 4.1.3 that this series is in fact diverging and that only a few terms should be kept. For example, for $\xi_i = 3$, one should keep only the terms up to $\mathcal{O}(\xi^{-28})$, which corresponds to the optimal truncation of the asymptotic series. Starting from such initial conditions leads to a Q -scaling⁵ inside the Vainshtein radius. It is then possible to tune the initial conditions (in particular $\dot{w}(\xi_i)$ which plays a crucial role) to pick up the Vainshtein solution in some range of distances (*cf.* Fig. 3 of [30]). For example, let's imagine we want to integrate from $\xi_i = 3$ to $\xi_f = 10^{-5}$, such that $w(\xi_f)$ is equal to the Vainshtein solution $w_V = \sqrt{\frac{8}{9\xi_f}}$ to a 5% precision. To do so, let's assume that the initial conditions in ξ_i are given by

$$\begin{aligned} u(\xi_i) &= u_{inf}(\xi_i), \\ v(\xi_i) &= v_{inf}(\xi_i), \\ w(\xi_i) &= w_{inf}(\xi_i), \\ \dot{w}(\xi_i) &= (1 + \alpha)\dot{w}_{inf}(\xi_i), \end{aligned}$$

where α is tuned by hand and can be found to be

$$\alpha = 5.385038128515 \times 10^{-3}. \quad (\text{D.18})$$

It means that α needs to be tuned to a 10^{-13} precision in order to reach the desired 5% precision on $w(\xi_f = 10^{-5})$. Note that even if $\xi_f = 10^{-2}$, i.e. if we want to reach a 5% precision on $w(\xi_f = 10^{-2})$, α still needs to be tuned to a relative precision of order 10^{-6} !

One can then add a source of fixed radius ξ_\odot ; we will typically use $\xi_\odot \in [10^{-4}, 10^{-1}]$. The idea is to pick the $w = \text{constant}$ behavior of Eq. (4.30) inside the star, by tuning $\dot{w}(\xi_i)$. However, this is not possible: in the presence of a source, it is necessary to tune also the other initial conditions. Because of the size of the parameter space and the needed precision, it is almost impossible to proceed that way.

Starting from the Vainshtein region $R_\odot < R < R_V$

Another option is to start from inside the Vainshtein regime, where the solution is close to the Vainshtein solution, and integrate inward and outward. The equation for w being of second order, the solution should depend on two integration constants A_0 and B_0 . If there is no extended source (*i.e.* the density is a delta function localized at the origin), one can show that one of these constants must be fixed such that the associated mode does not dominate the solution for small ξ . The resulting solution can be found under the form of the series expansion (4.26), which depends only on a single constant, and reads

$$w(\xi) = \sqrt{\frac{8}{9\xi}} + B_0 \xi^{-\frac{5}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{4}} - \frac{3(-5 + \sqrt{5})}{8\sqrt{2}(-4 + \sqrt{5})} B_0^2 \xi^{-2 + \frac{3\sqrt{5}}{2}} + \frac{6\xi^2}{31} + \dots \quad (\text{D.19})$$

There is one free constant B_0 to adjust by hand; imagine we want to integrate outward up to $\xi_f = 3$, and such that $w(\xi_f)$ is equal to the asymptotic solution w_{inf} with a 5%

⁵See Sec. 5.1.1 for the definition of the Q -scaling solutions.

precision ; then, $B_0 = -0.554111$, and the required precision on B_0 is 10^{-6} . Once B_0 is fixed in such a way, it is possible to integrate inward up to $\xi_f = 10^{-5}$ with no problem: the numerical solution perfectly follows the Vainshtein behavior.

When a source is included, the expansion (4.26) is not valid anymore: one can add another free constant, which was fixed to zero in the case with a point source by requiring that the Vainshtein behavior is dominant until $\xi = 0$. As a matter of fact, it is again very hard to integrate inside the source while starting from the Vainshtein region and using the expansion (4.26) as a starting guess.

Starting from inside the source $R < R_\odot$

This is the best way to pose initial conditions. Indeed, one can use the expansions inside the source

$$\begin{aligned} w_s(\xi) &= A_0 + \frac{3A_0\xi_\odot^3 - 2}{20A_0\xi_\odot^3} \xi^2 + \dots \\ u_s(\xi) &= \left(-\frac{A_0}{2} + \frac{1}{\xi_\odot^3}\right) \xi^2 + \dots \\ v_s(\xi) &= D_0 + \frac{1}{4} \left(A_0 + \frac{2}{\xi_\odot^3}\right) \xi^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

Even if there are two free constants to fix, this can be done easily by finding first A_0 (by integrating the DL equation (4.17) for w) and then D_0 (asking that $v(\xi_f) = v_{inf}(\xi_f)$). In order to reach a 5% precision in $w(\xi_f)$ (as compared to $w_{inf}(\xi_f)$), A_0 needs to be fixed with a relative precision of 10^{-8} , and its value reads

$$A_0 = 2.8698435. \quad (\text{D.21})$$

Besides, in order to have $v(\xi_f) = v_{inf}(\xi_f)$ with a 5% precision, D_0 needs to be fixed with a relative precision of 6×10^{-3} , and its value reads

$$D_0 = 15.5. \quad (\text{D.22})$$

To conclude, we can notice that even if the needed precision on A_0 is high, starting from inside the source is the best way to obtain a solution in a systematic way, exploring at each step a one dimension only parameter space.

D.3.2 Numerical integration the full system

Using DL initial conditions

In the case of the full system, one idea is to use the DL numerical solution as a guess for the initial conditions. In particular, in the presence of a source, one can start from the expansion (4.30), using the constants A_0, D_0 found in the DL. Doing so, and using a parameter $a \equiv R_V m = 10^{-2}$, it is possible to integrate the full system outward up to $\xi \sim 2$. In order to integrate further, a better tuning of the initial conditions is required. Instead of doing this tuning by hand, one can look to a series expansion inside the source, which would be valid beyond the DL.

Using a “full system” series expansion

It is possible to find a series expansion inside the source, valid for small ξ . It depends on three constants: $A_0 \equiv w(0)$, $D_0 \equiv v(0)$ and the pressure in the center of the star $P_0 = P_a(0)$. The first terms of this expansion read :

$$\begin{aligned}
 w_s(\xi) = & A_0 + \xi^2 \frac{e^{-a^4 D_0 - 2a^2 A_0}}{20(-2e^{a^4 D_0} - e^{a^2 A_0} + 3e^{a^4 D_0 + a^2 A_0})} \\
 & \times \left(-2e^{2a^4 D_0} + 4e^{2a^2 A_0} - 5e^{3a^2 A_0} - 2e^{a^4 D_0 + a^2 A_0} + 18e^{2a^4 D_0 + a^2 A_0} \right. \\
 & + 3e^{a^4 D_0 + 2a^2 A_0} + 6e^{2a^4 D_0 + 3a^2 A_0} (4 + a^2(P_0 - 5/\xi_\odot^3)) \\
 & + e^{2a^2(a^2 D_0 + A_0)} (-39 - 4a^2(P_0 - 3/\xi_\odot^3)) \\
 & \left. + e^{a^4 D_0 + 3a^2 A_0} (-1 + 2a^2(P_0 + 7/\xi_\odot^3)) \right) + \mathcal{O}(\xi^4)
 \end{aligned} \tag{D.23}$$

$$u_s(\xi) = -\frac{1}{4a^2} \left(2 + e^{-a^4 D_0} + e^{-2a^2 A_0} - 3e^{-a^2 A_0} - e^{-a^2(a^2 D_0 + A_0)} - 4\frac{a^2}{\xi_\odot^3} \right) \xi^2 + \mathcal{O}(\xi^4) \tag{D.24}$$

$$\begin{aligned}
 v_s(\xi) = & D_0 \\
 & + \frac{1}{4a^2} \left(-2e^{-a^4 D_0} - e^{-2a^2 A_0} + e^{-a^2(a^2 D_0 + A_0)} + 2(1 + a^2(P_0 + 1/\xi_\odot^3)) \right) \xi^2 + \mathcal{O}(\xi^4)
 \end{aligned} \tag{D.25}$$

$$\begin{aligned}
 P_s(\xi) = & P_0 - \frac{1}{8}a^2 e^{-a^4 D_0 - 2a^2 A_0} (P_0 + 3/\xi_\odot^3) \\
 & \times \left(-e^{a^4 D_0} + e^{a^2 A_0} - 2e^{2a^2 A_0} + 2e^{a^4 D_0 + 2a^2 A_0} (1 + a^2(P_0 + 1/\xi_\odot^3)) \right) + \mathcal{O}(\xi^4)
 \end{aligned} \tag{D.26}$$

One way to fix the constants is to use the DL ones; however, starting from $\xi_i = 10^{-5}$, it is not possible to integrate further than $\xi \sim 2$. It is possible to better adjust the constant, for example using the result of the relaxation method, in which case it is possible to integrate until $\xi_f = 3$ without problem. For example, for $a = 0.01$, $\xi_\odot = 0.1$, $\xi_i = 10^{-5}$, the constants are found to be

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 2.8706348, \\
 D_0 &= 15.49,
 \end{aligned}$$

and there is a 10^{-8} required precision on A_0 and a 6×10^{-3} required precision on D_0 in order to reach a 5% precision at $\xi_f = 3$. In order to fix P_0 , one can use the relaxation method too. In order to have

$$\frac{P_a(\xi = \xi_\odot)}{P_a(\xi = 0)} \leq 5\%, \tag{D.27}$$

one has to fix $P_0 = 7.5 \times 10^{-5}$ with a 10^{-2} relative precision.

Note that the range of parameter $a \equiv R_V \times m$ that we can explore using shooting method is quite large. It goes from very low values of a , e.g. $a = 10^{-5}$ to very high

values like $a \sim 0.6$. We show in Fig. D.1 the function v for $a = 0.63$; in this case, which corresponds to the highest value tried by Damour *et al.* in [85], there is no DL regime between $\xi \equiv R/R_V = 1$ and $\xi = R_V m^{-1} = a^{-1}$, since these two radius are not separated enough. As a consequence, the function v immediately adopts the Yukawa decay, confirming by shooting method the general form of the asymptotic behavior (D.16).

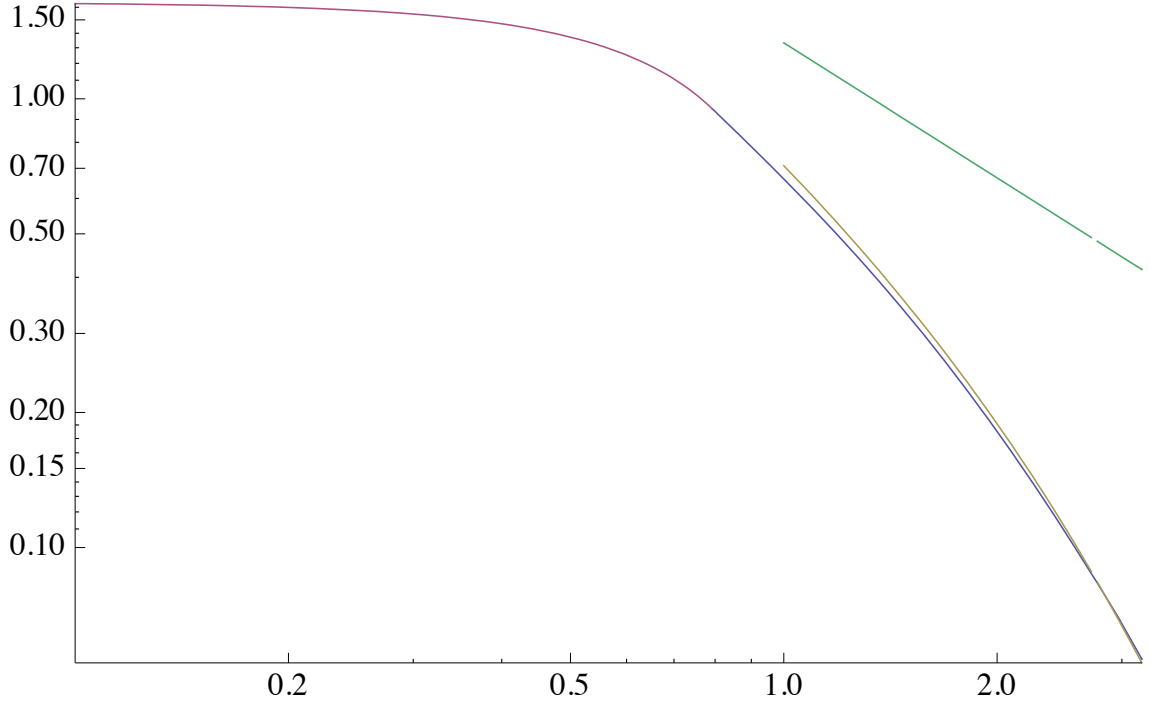


Figure D.1: Plot of the function v vs. R/R_V for $R_S m = 0.1$ (i.e $a \sim 0.63$) and $R_\odot = 5 \times R_S$ (i.e. $\xi_\odot \sim 0.79$). Both the DL $v \sim 4/(3\xi)$ and the asymptotic v_∞ of Eq. (D.16) behaviors are shown, the latter being a much better approximation of the solution beyond Vainshtein radius.

D.4 Relaxation method

The above results, obtained through a direct integration of the equations of motion, have been confirmed by the use of an alternative method based on relaxation. This approach is actually more adapted to the search of static solutions; in particular, for our massive gravity model, it allows to solve the system on an extremely wide range of parameters and distances (typically $[\xi = 0 ; \xi_\infty \sim 100]$). Both methods perfectly agree, demonstrating the robustness of our numerical investigation.

We've seen in the Sec. D.1.2 that the relaxation method needed an initial guess to start with, and we discussed the importance of this initial guess choice, since it will determine whether the iteration converges or not. Here is where the DL plays a crucial rôle in finding a solution of the full system: we can use the DL solution as a guess for the full solution. The DL solution itself is not too hard to find (no specific guess is needed).

The relaxation method allows to fix the boundary conditions at both ends of the interval on which we want to solve the equations of motion, *i.e.* at the origin $\xi = 0$ and at some distance ξ_∞ which is supposed to be much further than the Vainshtein radius (typically $\xi_\infty \sim 100$). The boundary conditions in the DL case are

$$\begin{aligned}\dot{w}(\xi = 0) &= 0, \\ u(\xi = 0) &= 0, \\ \dot{w}(\xi = \xi_\infty) &= -\frac{2}{\xi_\infty^3}, \\ v(\xi = \xi_\infty) &= -\frac{4}{3\xi_\infty}, \\ P(\xi = \xi_\infty) &= 0.\end{aligned}$$

One may notice that the condition on w at infinity is imposed on \dot{w} rather than on w . This is not necessary, but we found it easier to proceed that way in practice. Once the DL solution has been found, we can turn to the fully nonlinear system. In that case, the boundary conditions read

$$\begin{aligned}\dot{w}(\xi = 0) &= 0, \\ u(\xi = 0) &= 0, \\ w(\xi = \xi_\infty) &= \frac{2}{3} \frac{a^2}{\xi_\infty} \left(1 + \frac{1}{a\xi_\infty} + \frac{1}{(a\xi_\infty)^2} \right) e^{-a\xi_\infty}, \\ v(\xi = \xi_\infty) &= -\frac{4}{3} \frac{e^{-a\xi_\infty}}{\xi_\infty}, \\ P(\xi = \xi_\infty) &= 0.\end{aligned}$$

The relaxation allows to solve the solution on a wide range of the parameter a and for very large intervals. We checked that the solution was stable under changes of the required precision and step size. Most of the figures of this Thesis and of the papers [27, 28] have been obtained using such a method, including Figs. 5.1- 5.6 of Chapter 5, Figs 1-5 of [30] and Figs. 1-3 of [28].

To conclude this Appendix on Numerics, we would like to briefly come back to the difficulties that one encounters while trying to solve the spherically symmetric equations for MG. In particular, we have explained how the presence of a exponentially growing mode was responsible for a numerical instability of the solution beyond the Vainshtein radius. From our point of view, these numerical difficulties may explain the negative results of Damour *et al.* in [85], who did not find any spherically symmetric solutions of MG, for potential and ranges of parameters in which we were able to find a solution.

In order to circumvent these difficulties and eventually find a solution, we have designed very precise series expansions that allow to gain enough precision so that the equations of motions can be integrated *à la* Runge-Kutta. We have also used a relaxation method, which is insensitive to these instabilities. The DL has been very precious to provide a relevant guess of the solution of the general case, allowing the relaxation iteration process to converge.

Finally, the numerical results we obtains appeared to be very stable under change of required precision and step size. The fact that the two independent numerical methods agree is also a confirmation of the robustness of our numerical findings.

Bibliographie

- [1] Acquaviva, V., Baccigalupi, C., Leach, S. M., Liddle, A. R., and Perrotta, F., *Structure formation constraints on the jordan-brans-dicke theory*, Phys.Rev. **D71** (2005) 104025, [[astro-ph/0412052](#)].
- [2] Acquaviva, V., Baccigalupi, C., and Perrotta, F., *Weak lensing in generalized gravity theories*, Phys.Rev. **D70** (2004) 023515, [[astro-ph/0403654](#)].
- [3] Acquaviva, V., and Verde, L., *Observational signatures of jordan-brans-dicke theories of gravity*, JCAP **0712** (2007) 001, [[arXiv:0709.0082](#)].
- [4] Adams, A., Arkani-Hamed, N., Dubovsky, S., Nicolis, A., and Rattazzi, R., *Causality, analyticity and an ir obstruction to uv completion*, JHEP **0610** (2006) 014, [[hep-th/0602178](#)].
- [5] Adelberger, E., Dvali, G., and Gruzinov, A., *Photon mass bound destroyed by vortices*, Phys.Rev.Lett. **98** (2007) 010402, [[hep-ph/0306245](#)].
- [6] Adelberger, E., Heckel, B., Hoedl, S., Hoyle, C., Kapner, D., and Upadhye, A., *Particle physics implications of a recent test of the gravitational inverse square law*, Phys.Rev.Lett. **98** (2007) 131104, [[hep-ph/0611223](#)].
- [7] Adelberger, E. G., Heckel, B. R., and Nelson, A. E., *Tests of the gravitational inverse-square law*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **53** (2003) 77–121, [[hep-ph/0307284](#)].
- [8] Amendola, L., *Dark energy and the boomerang data*, Phys.Rev.Lett. **86** (2001) 196–199, [[astro-ph/0006300](#)].
- [9] Amendola, L., Charmousis, C., and Davis, S. C., *Constraints on gauss-bonnet gravity in dark energy cosmologies*, JCAP **0612** (2006) 020, [[hep-th/0506137](#)].
- [10] Amendola, L., Charmousis, C., and Davis, S. C., *Solar system constraints on gauss-bonnet mediated dark energy*, JCAP **0710** (2007) 004, [[arXiv:0704.0175](#)].
- [11] Amendola, L., Kunz, M., and Sapone, D., *Measuring the dark side (with weak lensing)*, JCAP **0804** (2008) 013, [[arXiv:0704.2421](#)].
- [12] Amin, M. A., Wagoner, R. V., and Blandford, R. D., *A sub-horizon framework for probing the relationship between the cosmological matter distribution and metric perturbations*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **390** (2008) 131–142, [[arXiv:0708.1793](#)].

- [13] **Particle Data Group** Collaboration, Amsler, C., et al., *Review of particle physics*, Phys. Lett. **B667** (2008) 1.
- [14] Angus, G. W., Famaey, B., and Zhao, H., *Can mond take a bullet? analytical comparisons of three versions of mond beyond spherical symmetry*, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. **371** (2006) 138, [[astro-ph/0606216](#)].
- [15] Angus, G. W., Shan, H., Zhao, H., and Famaey, B., *On the proof of dark matter, the law of gravity and the mass of neutrinos*, Astrophys.J. **654** (2007) L13–L16, [[astro-ph/0609125](#)].
- [16] Antoniadis, I., Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S., and Dvali, G., *New dimensions at a millimeter to a fermi and superstrings at a tev*, Phys.Lett.B **436** (1998) 257–263, [[hep-ph/9804398](#)].
- [17] Aragone, C., and Chela-Flores, J., *Properties of the f-g theory*, Nuovo Cim. **A10** (1972) 818–832.
- [18] Arkani-Hamed, N., Cheng, H.-C., Luty, M. A., and Mukohyama, S., *Ghost condensation and a consistent infrared modification of gravity*, JHEP **0405** (2004) 074, [[hep-th/0312099](#)].
- [19] Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S., and Dvali, G., *The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*, Phys.Lett.B **429** (1998) 263–272, [[hep-ph/9803315](#)].
- [20] Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S., and Dvali, G., *Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with sub-millimeter dimensions and tev scale quantum gravity*, Phys.Rev. **D59** (1999) 086004, [[hep-ph/9807344](#)].
- [21] Arkani-Hamed, N., Georgi, H., and Schwartz, M. D., *Effective field theory for massive gravitons and gravity in theory space*, Annals Phys. **305** (2003) 96–118, [[hep-th/0210184](#)].
- [22] Armendariz-Picon, C., Damour, T., and Mukhanov, V., *k-inflation*, Phys.Lett.B **458** (1999) 209–218, [[hep-th/9904075](#)].
- [23] Armendariz-Picon, C., Mukhanov, V., and Steinhardt, P. J., *A dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late-time cosmic acceleration*, Phys.Rev.Lett. **85** (2000) 4438–4441, [[astro-ph/0004134](#)].
- [24] Armendariz-Picon, C., Mukhanov, V., and Steinhardt, P. J., *Essentials of k-essence*, Phys.Rev.D **63** (2001) 103510, [[astro-ph/0006373](#)].
- [25] Arnowitt, R. L., Deser, S., and Misner, C. W., *The dynamics of general relativity*, [gr-qc/0405109](#).
- [26] Astier, P., Guy, J., Regnault, N., Pain, R., Aubourg, E., Balam, D., Basa, S., Carlberg, R., Fabbro, S., Fouchez, D., Hook, I., Howell, D., Lafoux, H., Neill, J., Palanque-Delabrouille, N., Perrett, K., Pritchett, C., Rich, J., Sullivan, M., Taillet, R., Aldering, G., Antilogus, P., Arsenijevic, V., Balland, C., Baumont, S., Bronder, J., Courtois,

- H., Ellis, R., Filiol, M., Goncalves, A., Goobar, A., Guide, D., Hardin, D., Lusset, V., Lidman, C., McMahon, R., Mouchet, M., Mourao, A., Perlmutter, S., Ripoche, P., Tao, C., and Walton, N., *The supernova legacy survey : Measurement of ω , ω_{Λ} and w from the first year data set*, *Astron.Astrophys.* **447** (2006) 31–48, [[astro-ph/0510447](#)].
- [27] Babichev, E., Deffayet, C., and Ziour, R., *k-mouflage gravity*, *International Journal of Modern Physics D* (Accepté pour publication) (2009) [[arXiv:0905.2943](#)].
- [28] Babichev, E., Deffayet, C., and Ziour, R., *Recovering general relativity from massive gravity*, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 201102, [[arXiv:0907.4103](#)].
- [29] Babichev, E., Deffayet, C., and Ziour, R., *Spherically symmetric solutions of massive gravity*, (in preparation) (2009).
- [30] Babichev, E., Deffayet, C., and Ziour, R., *The vainshtein mechanism in the decoupling limit of massive gravity*, *JHEP* **0905** (2009) 098, [[arXiv:0901.0393](#)].
- [31] Babichev, E., and Langlois, D., *Relativistic stars in $f(r)$ gravity*, [arXiv:0904.1382](#).
- [32] Baccigalupi, C., Matarrese, S., and Perrotta, F., *Tracking extended quintessence*, *Phys.Rev.* **D62** (2000) 123510, [[astro-ph/0005543](#)].
- [33] Bardeen, J. M., *Gauge Invariant Cosmological Perturbations*, *Phys. Rev.* **D22** (1980) 1882–1905.
- [34] Bartelmann, M., and Schneider, P., *Weak gravitational lensing*, *Phys.Rept.* **340** (2001) 291–472, [[astro-ph/9912508](#)].
- [35] Bartolo, N., and Pietroni, M., *Scalar-tensor gravity and quintessence*, *Phys.Rev.D* **61** (2000) 023518, [[hep-ph/9908521](#)].
- [36] Bean, R., *A weak lensing detection of a deviation from general relativity on cosmic scales*, [arXiv:0909.3853](#).
- [37] Bekaert, X., Cnockaert, S., Iazeolla, C., and Vasiliev, M. A., *Nonlinear higher spin theories in various dimensions*, [hep-th/0503128](#).
- [38] Bekenstein, J. D., *Relativistic gravitation theory for the mond paradigm*, *Phys.Rev.* **D70** (2004) 083509 ; Erratum-ibid. **D71** (2005) 069901, [[astro-ph/0403694](#)].
- [39] Berezhiani, Z., Comelli, D., Nesti, F., and Pilo, L., *Spontaneous lorentz breaking and massive gravity*, *Phys.Rev.Lett.* **99** (2007) 131101, [[hep-th/0703264](#)].
- [40] Berezhiani, Z., Comelli, D., Nesti, F., and Pilo, L., *Exact spherically symmetric solutions in massive gravity*, *JHEP* **0807** (2008) 130, [[arXiv:0803.1687](#)].
- [41] Bergmann, P. G., *Comments on the scalar tensor theory*, *Int. J. Theor. Phys.* **1** (1968) 25–36.
- [42] Bernardeau, F., *Constraints on higher-dimensional gravity from the cosmic shear three-point correlation function*, [astro-ph/0409224](#).

- [43] Bernardeau, F., Colombi, S., Gaztanaga, E., and Scoccimarro, R., *Large-scale structure of the universe and cosmological perturbation theory*, Phys.Rept. **367** (2002) 1–248, [[astro-ph/0112551](#)].
- [44] Bertotti, B., Iess, L., and Tortora, P., *A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft*, Nature **425** (2003) 374.
- [45] Bertschinger, E., and Zukin, P., *Distinguishing modified gravity from dark energy*, Phys.Rev.D **78** (2008) 024015, [[arXiv:0801.2431](#)].
- [46] Blas, D., Deffayet, C., and Garriga, J., *Global structure of bigravity solutions*, Class.Quant.Grav. **23** (2006) 1697–1719, [[hep-th/0508163](#)].
- [47] Blas, D., Deffayet, C., and Garriga, J., *Bigravity and lorentz-violating massive gravity*, Phys.Rev.D **76** (2007) 104036, [[arXiv:0705.1982](#)].
- [48] Boisseau, B., Esposito-Farese, G., Polarski, D., and Starobinsky, A., *Reconstruction of a scalar-tensor theory of gravity in an accelerating universe*, Phys.Rev.Lett. **85** (2000) 2236, [[gr-qc/0001066](#)].
- [49] Boulware, D. G., and Deser, S., *Can gravitation have a finite range ?*, Phys. Rev. **D6** (1972) 3368–3382.
- [50] Brans, C., and Dicke, R. H., *Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation*, Phys. Rev. **124** (1961) 925–935.
- [51] Brax, P., van de Bruck, C., Davis, A.-C., Khoury, J., and Weltman, A., *Detecting dark energy in orbit – the cosmological chameleon*, Phys.Rev.D **70** (2004) 123518, [[astro-ph/0408415](#)].
- [52] Brax, P., van de Bruck, C., Davis, A.-C., and Shaw, D. J., *$f(r)$ gravity and chameleon theories*, Phys.Rev.D **78** (2008) 104021, [[arXiv:0806.3415](#)].
- [53] Broadhurst, T. J., Taylor, A. N., and Peacock, J. A., *Mapping cluster mass distributions via gravitational lensing of background galaxies*, Astrophys. J. **438** (1995) 49, [[astro-ph/9406052](#)].
- [54] Bruneton, J.-P., *Alternative theories of gravitation and applications*, Ph.D. Thesis (Advisor : Gilles Esposito-Farese) (2007).
- [55] Bruneton, J.-P., and Esposito-Farese, G., *Field-theoretical formulations of mond-like gravity*, Phys.Rev.D **76** :124012,2007; Erratum-ibid.D **76** (2007) 129902, [[arXiv:0705.4043](#)].
- [56] Byron, F., and Fuller, R., *Mathematics of Classical and Quantum Physics, Vol.2*. Addison-Wesley, 1970.
- [57] Caldwell, R., *A phantom menace ? cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state*, Phys.Lett. **B545** (2002) 23–29, [[astro-ph/9908168](#)].

- [58] Caldwell, R., Cooray, A., and Melchiorri, A., *Constraints on a new post-general relativity cosmological parameter*, Phys.Rev.D **76** (2007) 023507, [[astro-ph/0703375](#)].
- [59] Caldwell, R. R., Kamionkowski, M., and Weinberg, N. N., *Phantom energy and cosmic doomsday*, Phys.Rev.Lett. **91** (2003) 071301, [[astro-ph/0302506](#)].
- [60] Capozziello, S., De Laurentis, M., and Faraoni, V., *A bird's eye view of $f(R)$ -gravity*, [arXiv:0909.4672](#).
- [61] Capozziello, S., and Tsujikawa, S., *Solar system and equivalence principle constraints on $f(r)$ gravity by chameleon approach*, Phys.Rev.D **77** (2008) 107501, [[arXiv:0712.2268](#)].
- [62] Carroll, S. M., Duvvuri, V., Trodden, M., and Turner, M. S., *Is cosmic speed-up due to new gravitational physics ?*, Phys.Rev. **D70** (2004) 043528, [[astro-ph/0306438](#)].
- [63] Carroll, S. M., Felice, A. D., Duvvuri, V., Easson, D. A., Trodden, M., and Turner, M. S., *The cosmology of generalized modified gravity models*, Phys.Rev. **D71** (2005) 063513, [[astro-ph/0410031](#)].
- [64] Charmousis, C., Gregory, R., Kaloper, N., and Padilla, A., *Dgp spectroscopy*, JHEP **0610** (2006) 066, [[hep-th/0604086](#)].
- [65] Chen, X., and Kamionkowski, M., *Cosmic microwave background temperature and polarization anisotropy in brans-dicke cosmology*, Phys.Rev.D **60** (1999) 104036, [[astro-ph/9905368](#)].
- [66] Chiaverini, J., Smullin, S. J., Geraci, A. A., Weld, D. M., and Kapitulnik, A., *New experimental constraints on non-newtonian forces below 100 microns*, Phys.Rev.Lett. **90** (2003) 151101, [[hep-ph/0209325](#)].
- [67] Chiba, T., *Quintessence, the gravitational constant, and gravity*, Phys.Rev. **D60** (1999) 083508, [[gr-qc/9903094](#)].
- [68] Chiba, T., *$1/R$ gravity and scalar-tensor gravity*, Phys. Lett. **B575** (2003) 1–3, [[astro-ph/0307338](#)].
- [69] Chiba, T., Okabe, T., and Yamaguchi, M., *Kinetically driven quintessence*, Phys.Rev.D **62** (2000) 023511, [[astro-ph/9912463](#)].
- [70] Chibisov, G. V., *Astrophysical upper limits on the photon rest mass*, Sov. Phys. Usp. **19** (1976) 624–626.
- [71] Choudhury, T. R., and Padmanabhan, T., *Cosmological parameters from supernova observations : A critical comparison of three data sets*, Astron.Astrophys. **429** (2005) 807, [[astro-ph/0311622](#)].
- [72] Chow, N., and Khoury, J., *Galileon cosmology*, Phys.Rev.D **80** (2009) 024037, [[arXiv:0905.1325](#)].

- [73] Clowe, D., Bradac, M., Gonzalez, A. H., Markevitch, M., Randall, S. W., Jones, C., and Zaritsky, D., *A direct empirical proof of the existence of dark matter*, *Astrophys.J.* **648** (2006) L109–L113, [[astro-ph/0608407](#)].
- [74] Coc, A., Olive, K. A., Uzan, J.-P., and Vangioni, E., *Big bang nucleosynthesis constraints on scalar-tensor theories of gravity*, *Phys.Rev.D* **73** (2006) 083525, [[astro-ph/0601299](#)].
- [75] Copeland, E. J., Sami, M., and Tsujikawa, S., *Dynamics of dark energy*, *Int.J.Mod.Phys.D* **15** (2006) 1753–1936, [[hep-th/0603057](#)].
- [76] Corbelli, E., and Salucci, P., *The extended rotation curve and the dark matter halo of M33*, *mnras* **311** (2000) 441–447, [[arXiv :astro-ph/9909252](#)].
- [77] Creminelli, P., Nicolis, A., Papucci, M., and Trincherini, E., *Ghosts in massive gravity*, *JHEP* **0509** (2005) 003, [[hep-th/0505147](#)].
- [78] Csaki, C., Kaloper, N., and Terning, J., *Dimming supernovae without cosmic acceleration*, *Phys.Rev.Lett.* **88** (2002) 161302, [[hep-ph/0111311](#)].
- [79] Cutler, C., *Angular resolution of the LISA gravitational wave detector*, *Phys. Rev.* **D57** (1998) 7089–7102, [[gr-qc/9703068](#)].
- [80] Damour, T., and Esposito-Farese, G., *Tensor multiscalar theories of gravitation*, *Class. Quant. Grav.* **9** (1992) 2093–2176.
- [81] Damour, T., and Esposito-Farese, G., *Nonperturbative strong field effects in tensor - scalar theories of gravitation*, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 2220–2223.
- [82] Damour, T., and Esposito-Farese, G., *Tensor-scalar gravity and binary-pulsar experiments*, *Phys. Rev.* **D54** (1996) 1474–1491, [[gr-qc/9602056](#)].
- [83] Damour, T., and Kogan, I. I., *Effective lagrangians and universality classes of non-linear bigravity*, *Phys.Rev.* **D66** (2002) 104024, [[hep-th/0206042](#)].
- [84] Damour, T., Kogan, I. I., and Papazoglou, A., *Non-linear bigravity and cosmic acceleration*, *Phys.Rev.* **D66** (2002) 104025, [[hep-th/0206044](#)].
- [85] Damour, T., Kogan, I. I., and Papazoglou, A., *Spherically symmetric spacetimes in massive gravity*, *Phys.Rev.* **D67** (2003) 064009, [[hep-th/0212155](#)].
- [86] Damour, T., and Nordtvedt, K., *General relativity as a cosmological attractor of tensor scalar theories*, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 2217–2219.
- [87] Damour, T., and Nordtvedt, K., *Tensor - scalar cosmological models and their relaxation toward general relativity*, *Phys. Rev.* **D48** (1993) 3436–3450.
- [88] Damour, T., Piazza, F., and Veneziano, G., *Runaway dilaton and equivalence principle violations*, *Phys.Rev.Lett.* **89** (2002) 081601, [[gr-qc/0204094](#)].
- [89] Damour, T., Piazza, F., and Veneziano, G., *Violations of the equivalence principle in a dilaton-runaway scenario*, *Phys.Rev.* **D66** (2002) 046007, [[hep-th/0205111](#)].

- [90] Damour, T., and Pichon, B., *Big bang nucleosynthesis and tensor-scalar gravity*, Phys.Rev. **D59** (1999) 123502, [[astro-ph/9807176](#)].
- [91] de Rham, C., Hofmann, S., Khoury, J., and Tolley, A. J., *Cascading gravity and degravitation*, JCAP **0802** (2008) 011, [[arXiv:0712.2821](#)].
- [92] Deffayet, C., *Cosmology on a brane in minkowski bulk*, Phys.Lett.B **502** (2001) 199–208, [[hep-th/0010186](#)].
- [93] Deffayet, C., *On brane world cosmological perturbations*, Phys.Rev. **D66** (2002) 103504, [[hep-th/0205084](#)].
- [94] Deffayet, C., Deser, S., and Esposito-Farese, G., *Generalized galileons : All scalar models whose curved background extensions maintain second-order field equations and stress tensors*, Phys. Rev. D **80** (2009) 064015, [[arXiv:0906.1967](#)].
- [95] Deffayet, C., Dvali, G., and Gabadadze, G., *Accelerated universe from gravity leaking to extra dimensions*, Phys.Rev. **D65** (2002) 044023, [[astro-ph/0105068](#)].
- [96] Deffayet, C., Dvali, G., Gabadadze, G., and Vainshtein, A., *Nonperturbative continuity in graviton mass versus perturbative discontinuity*, Phys.Rev. **D65** (2002) 044026, [[hep-th/0106001](#)].
- [97] Deffayet, C., Esposito-Farese, G., and Vikman, A., *Covariant galileon*, Phys. Rev. D **79** (2009) 084003, [[arXiv:0901.1314](#)].
- [98] Deffayet, C., Gabadadze, G., and Iglesias, A., *Perturbations of self-accelerated universe*, JCAP **0608** (2006) 012, [[hep-th/0607099](#)].
- [99] Deffayet, C., Harari, D., Uzan, J.-P., and Zaldarriaga, M., *Dimming of supernovae by photon-pseudoscalar conversion and the intergalactic plasma*, Phys.Rev. **D66** (2002) 043517, [[hep-ph/0112118](#)].
- [100] Deffayet, C., and Menou, K., *Probing gravity with spacetime sirens*, Astrophys.J. **668** (2007) L143–L146, [[arXiv:0709.0003](#)].
- [101] Deffayet, C., and Rombouts, J.-W., *Ghosts, strong coupling and accidental symmetries in massive gravity*, Phys.Rev. **D72** (2005) 044003, [[gr-qc/0505134](#)].
- [102] Deffayet, C., and Uzan, J.-P., *Photon mixing in universes with large extra-dimensions*, Phys.Rev. **D62** (2000) 063507, [[hep-ph/0002129](#)].
- [103] Deser, S., *Self-interaction and gauge invariance*, Gen. Rel. Grav. **1** (1970) 9–18, [[gr-qc/0411023](#)].
- [104] DeWitt, B. S., *Quantum Theory of Gravity. 1. The Canonical Theory*, Phys. Rev. **160** (1967) 1113–1148.
- [105] Dodelson, S., *Modern cosmology*. Academic Press, 2003. Amsterdam, Netherlands : . (2003) 440 p.

- [106] Dubovsky, S., Tinyakov, P., and Tkachev, I., *Cosmological attractors in massive gravity*, Phys.Rev. **D72** (2005) 084011, [[hep-th/0504067](#)].
- [107] Duff, M. J., and Pope, C. N., *Consistent truncations in kaluza-klein theories*, Nucl. Phys. **B255** (1985) 355–364.
- [108] Duff, M. J., Pope, C. N., and Stelle, K. S., *Consistent interacting massive spin-2 requires an infinity of states*, Phys. Lett. **B223** (1989) 386.
- [109] Dvali, G., *Infrared modification of gravity*, [hep-th/0402130](#).
- [110] Dvali, G., Gabadadze, G., Kolanovic, M., and Nitti, F., *The power of brane-induced gravity*, Phys.Rev.D **64** (2001) 084004, [[hep-ph/0102216](#)].
- [111] Dvali, G., Gabadadze, G., and Porrati, M., *4d gravity on a brane in 5d minkowski space*, Phys.Lett.B **485** (2000) 208–214, [[hep-th/0005016](#)].
- [112] Dvali, G., Hofmann, S., and Khoury, J., *Degravitation of the cosmological constant and graviton width*, Phys.Rev.D **76** (2007) 084006, [[hep-th/0703027](#)].
- [113] Dvali, G. R., Gabadadze, G., and Shifman, M. A., *(Quasi)localized gauge field on a brane : Dissipating cosmic radiation to extra dimensions ?*, Phys. Lett. **B497** (2001) 271–280, [[hep-th/0010071](#)].
- [114] Ecalle, J., *Private communication*, .
- [115] Eisenstein, D. J., Zehavi, I., Hogg, D. W., Scoccimarro, R., Blanton, M. R., Nichol, R. C., Scranton, R., Seo, H., Tegmark, M., Zheng, Z., Anderson, S., Annis, J., Bahcall, N., Brinkmann, J., Burles, S., Castander, F. J., Connolly, A., Csabai, I., Doi, M., Fukugita, M., Frieman, J. A., Glazebrook, K., Gunn, J. E., Hendry, J. S., Hennessy, G., Ivezic, Z., Kent, S., Knapp, G. R., Lin, H., Loh, Y., Lupton, R. H., Margon, B., McKay, T., Meiksin, A., Munn, J. A., Pope, A., Richmond, M., Schlegel, D., Schneider, D., Shimasaku, K., Stoughton, C., Strauss, M., SubbaRao, M., Szalay, A. S., Szapudi, I., Tucker, D., Yanny, B., and York, D., *Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies*, Astrophys.J. **633** (2005) 560–574, [[astro-ph/0501171](#)].
- [116] Esposito-Farese, G., *Binary-pulsar tests of strong-field gravity and gravitational radiation damping*, Proceedings Word **Scientific** (2005) 647, [[gr-qc/0402007](#)].
- [117] Esposito-Farese, G., and Polarski, D., *Scalar-tensor gravity in an accelerating universe*, Phys.Rev. **D63** (2001) 063504, [[gr-qc/0009034](#)].
- [118] Faraoni, V., *Cosmology in scalar tensor gravity*, vol. 139 of *Fundamental Theories of Physics Series*. Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [119] Faulkner, T., Tegmark, M., Bunn, E. F., and Mao, Y., *Constraining $f(r)$ gravity as a scalar tensor theory*, Phys.Rev.D **76** (2007) 063505, [[astro-ph/0612569](#)].
- [120] Ferreras, I., Mavromatos, N. E., Sakellariadou, M., and Yusaf, M. F., *Incompatibility of rotation curves with gravitational lensing for teves*, [arXiv:0907.1463](#).

- [121] Fierz, M., *Force-free particles with any spin*, Helv. Phys. Acta **12** (1939) 3.
- [122] Fierz, M., *On the physical interpretation of P.Jordan's extended theory of gravitation*, Helv. Phys. Acta **29** (1956) 128–134.
- [123] Fierz, M., and Pauli, W., *On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field*, Proc. Roy. Soc. Lond. **A 173** (1939) 211.
- [124] Francia, D., Mourad, J., and Sagnotti, A., *Current exchanges and unconstrained higher spins*, Nucl.Phys.B **773** (2007) 203–237, [[hep-th/0701163](#)].
- [125] Francia, D., Mourad, J., and Sagnotti, A., *(a)ds exchanges and partially-massless higher spins*, Nucl.Phys.B **804** (2008) 383–420, [[arXiv:0803.3832](#)].
- [126] Freedman, W. L., Madore, B. F., Gibson, B. K., Ferrarese, L., Kelson, D. D., Sakai, S., Mould, J. R., R. C. Kennicutt, J., Ford, H. C., Graham, J. A., Huchra, J. P., Hughes, S. M. G., Illingworth, G. D., Macri, L. M., and Stetson, P. B., *Final results from the hubble space telescope key project to measure the hubble constant*, Astrophys.J. **553** (2001) 47–72, [[astro-ph/0012376](#)].
- [127] Frolov, A. V., *A Singularity Problem with $f(R)$ Dark Energy*, Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 061103, [[arXiv:0803.2500](#)].
- [128] Fugmann, W., *Galaxies near distant quasars - Observational evidence for statistical gravitational lensing*, Astron. & Astrophys. **204** (1988) 73–80.
- [129] Gannouji, R., Moraes, B., and Polarski, D., *The growth of matter perturbations in $f(R)$ models*, JCAP **0902** (2009) 034, [[arXiv:0809.3374](#)].
- [130] Garriga, J., and Tanaka, T., *Gravity in the randall-sundrum brane world*, Phys.Rev.Lett. **84** (2000) 2778–2781, [[hep-th/9911055](#)].
- [131] Gasperini, M., Piazza, F., and Veneziano, G., *Quintessence as a run-away dilaton*, Phys.Rev. **D65** (2002) 023508, [[gr-qc/0108016](#)].
- [132] Gaztanaga, E., *Detection of weak gravitational lensing magnification from galaxy-qso cross-correlation in the sdss*, Astrophys. J. **589** (2003) 82, [[astro-ph/0210311](#)].
- [133] Gaztanaga, E., Cabre, A., and Hui, L., *Clustering of Luminous Red Galaxies IV : Baryon Acoustic Peak in the Line-of-Sight Direction and a Direct Measurement of $H(z)$* , [arXiv :0807.3551](#) [[astro-ph](#)].
- [134] Geraci, A. A., Smullin, S. J., Weld, D. M., Chiaverini, J., and Kapitulnik, A., *Improved constraints on non-newtonian forces at 10 microns*, Phys.Rev.D **78** (2008) 022002, [[arXiv:0802.2350](#)].
- [135] Goldhaber, A. S., and Nieto, M. M., *Terrestrial and extra-terrestrial limits on the photon mass*, Rev. Mod. Phys. **43** (1971) 277–296.
- [136] Gorbunov, D., Koyama, K., and Sibiryakov, S., *More on ghosts in dgp model*, Phys.Rev.D **73** (2006) 044016, [[hep-th/0512097](#)].

- [137] Gradshteyn, and Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. 2000.
- [138] Gregory, R., Kaloper, N., Myers, R. C., and Padilla, A., *A new perspective on dgp gravity*, JHEP **0710** (2007) 069, [[arXiv:0707.2666](#)].
- [139] Gregory, R., Rubakov, V. A., and Sibiryakov, S. M., *Opening up extra dimensions at ultra-large scales*, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 5928–5931, [[hep-th/0002072](#)].
- [140] Gunn, J. E., *A Fundamental Limitation on the Accuracy of Angular Measurements in Observational Cosmology*, Astrophys. J. **147** (1967) 61.
- [141] Guzik, J., and Seljak, U., *Galaxy-dark matter correlations applied to galaxy-galaxy lensing : predictions from the semi-analytic galaxy formation models*, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. **321** (2001) 439, [[astro-ph/0007067](#)].
- [142] Guzik, J., and Seljak, U., *Virial masses of galactic halos from galaxy-galaxy lensing : theoretical modeling and application to sdss*, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. **335** (2002) 311, [[astro-ph/0201448](#)].
- [143] Hansen, B. M. S., Brewer, J., Fahlman, G. G., Gibson, B. K., Ibata, R., Limongi, M., Rich, R. M., Richer, H. B., Shara, M. M., and Stetson, P. B., *The white dwarf cooling sequence of the globular cluster messier 4*, Astrophys.J. **574** (2002) L155–L158, [[astro-ph/0205087](#)].
- [144] Henneaux, M., and Teitelboim, C., *Quantization of gauge systems*, . Princeton, USA : Univ. Pr. (1992) 520 p.
- [145] Higuchi, A., *Forbidden mass range for spin-2 field theory in de sitter space-time*, Nucl. Phys. **B282** (1987) 397.
- [146] Higuchi, A., *Massive symmetric tensor field in space-times with a positive cosmological constant*, Nucl. Phys. **B325** (1989) 745–765.
- [147] Hildebrandt, H., van Waerbeke, L., and Erben, T., *Cars : The cfhtls-archive-research survey iii. first detection of cosmic magnification in samples of normal high-z galaxies*, [arXiv:0906.1580](#).
- [148] Hojman, S. A., Kuchar, K., and Teitelboim, C., *Geometrodynamics Regained*, Annals Phys. **96** (1976) 88–135.
- [149] Hoskins, J. K., Newman, R. D., Spero, R., and Schultz, J., *Experimental tests of the gravitational inverse square law for mass separations from 2-cm to 105-cm*, Phys. Rev. **D32** (1985) 3084–3095.
- [150] Hoyle, C. D., et al., *Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law*, Phys. Rev. **D70** (2004) 042004, [[hep-ph/0405262](#)].
- [151] Hu, W., *Acceleration from modified gravity : Lessons from worked examples*, [arXiv:0906.2024](#).
- [152] Hu, W., and Sawicki, I., *Models of $f(r)$ cosmic acceleration that evade solar-system tests*, Phys.Rev.D **76** (2007) 064004, [[arXiv:0705.1158](#)].

- [153] Hu, W., and Sawicki, I., *A parameterized post-friedmann framework for modified gravity*, Phys.Rev.D **76** (2007) 104043, [[arXiv:0708.1190](#)].
- [154] Hui, L., Gaztanaga, E., and LoVerde, M., *Anisotropic magnification distortion of the 3d galaxy correlation : I. real space*, Phys.Rev.D **76** (2007) 103502, [[arXiv:0706.1071](#)].
- [155] Hui, L., Nicolis, A., and Stubbs, C., *Equivalence principle implications of modified gravity models*, [arXiv:0905.2966](#).
- [156] Huterer, D., and Linder, E. V., *Separating dark physics from physical darkness : Minimalist modified gravity vs. dark energy*, Phys.Rev.D **75** (2007) 023519, [[astro-ph/0608681](#)].
- [157] Isham, C. J., Salam, A., and Strathdee, J. A., *F-dominance of gravity*, Phys. Rev. **D3** (1971) 867–873.
- [158] Isham, C. J., and Storey, D., *Exact Spherically Symmetric Classical Solutions for the F- G Theory of Gravity*, Phys. Rev. **D18** (1978) 1047.
- [159] Itzykson, C., and Zuber, J. B., *Quantum field theory*. Mcgraw-hill, 1980. New York, Usa : Mcgraw-hill (1980) 705 P.(International Series In Pure and Applied Physics).
- [160] Jain, B., Scranton, R., and Sheth, R. K., *Quasar-galaxy and galaxy-galaxy cross-correlations : Model predictions with realistic galaxies*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **345** (2003) 62, [[astro-ph/0304203](#)].
- [161] Jain, B., and Taylor, A., *Cross-correlation tomography : Measuring dark energy evolution with weak lensing*, Phys.Rev.Lett. **91** (2003) 141302, [[astro-ph/0306046](#)].
- [162] Jain, B., and Zhang, P., *Observational tests of modified gravity*, Phys.Rev.D **78** (2008) 063503, [[arXiv:0709.2375](#)].
- [163] Jimenez, R., Thejll, P., Jorgensen, U. G., MacDonald, J., and Pagel, B., *Ages of globular clusters : a new approach*, mnras **282** (1996) 926–942, [[arXiv :astro-ph/9602132](#)].
- [164] Johnston, D. E., Sheldon, E. S., Wechsler, R. H., Rozo, E., Koester, B. P., Frieman, J. A., McKay, T. A., Evrard, A. E., Becker, M. R., and Annis, J., *Cross-correlation weak lensing of sdss galaxy clusters ii : Cluster density profiles and the mass–richness relation*, [arXiv:0709.1159](#).
- [165] Jordan, P., *Formation of the Stars and Development of the Universe*, Nature **164** (1949) 637–640.
- [166] Jordan, P., *Zum gegenwartigen stand der diracschen kosmologischen hyposthesen*, Z. Phys. **157** (1959) 112.
- [167] Kaloper, N., *Gravitational shock waves and their scattering in brane- induced gravity*, Phys. Rev. **D71** (2005) 086003, [[hep-th/0502035](#)].

- [168] Kapner, D. J., et al., *Tests of the gravitational inverse-square law below the dark-energy length scale*, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 021101, [[hep-ph/0611184](#)].
- [169] Khoury, J., and Weltman, A., *Chameleon cosmology*, Phys.Rev. **D69** (2004) 044026, [[astro-ph/0309411](#)].
- [170] Khoury, J., and Weltman, A., *Chameleon fields : Awaiting surprises for tests of gravity in space*, Phys.Rev.Lett. **93** (2004) 171104, [[astro-ph/0309300](#)].
- [171] Knop, R. A., Aldering, G., Amanullah, R., Astier, P., Blanc, G., Burns, M. S., Conley, A., Deustua, S. E., Doi, M., Ellis, R., Fabbro, S., Folatelli, G., Fruchter, A. S., Garavini, G., Garmond, S., Garton, K., Gibbons, R., Goldhaber, G., Goobar, A., Groom, D. E., Hardin, D., Hook, I., Howell, D. A., Kim, A. G., Lee, B. C., Lidman, C., Mendez, J., Nobili, S., Nugent, P. E., Pain, R., Panagia, N., Pennypacker, C. R., Perlmutter, S., Quimby, R., Raux, J., Regnault, N., Ruiz-Lapuente, P., Sainton, G., Schaefer, B., Schahmaneche, K., Smith, E., Spadafora, A. L., Stanishev, V., Sullivan, M., Walton, N. A., Wang, L., Wood-Vasey, W. M., and Yasuda, N., *New constraints on ω_{de} , ω_{de} , and w from an independent set of eleven high-redshift supernovae observed with hst*, Astrophys.J. **598** (2003) 102, [[astro-ph/0309368](#)].
- [172] Kobayashi, T., and Maeda, K.-i., *Relativistic stars in $f(R)$ gravity, and absence thereof*, Phys. Rev. **D78** (2008) 064019, [[arXiv:0807.2503](#)].
- [173] Kodama, H., and Sasaki, M., *Cosmological Perturbation Theory*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **78** (1984) 1–166.
- [174] Kogan, I. I., Mouslopoulos, S., and Papazoglou, A., *The m goes to 0 limit for massive graviton in ds_4 and ads_4 . how to circumvent the van dam-veltman-zakharov discontinuity*, Phys.Lett. **B503** (2001) 173–180, [[hep-th/0011138](#)].
- [175] Koivisto, T., and Mota, D. F., *Cosmology and astrophysical constraints of gauss-bonnet dark energy*, Phys.Lett.B **644** (2007) 104–108, [[astro-ph/0606078](#)].
- [176] Koivisto, T., and Mota, D. F., *Gauss-bonnet quintessence : Background evolution, large scale structure and cosmological constraints*, Phys.Rev.D **75** (2007) 023518, [[hep-th/0609155](#)].
- [177] Komatsu, E., Dunkley, J., Nolte, M. R., Bennett, C. L., Gold, B., Hinshaw, G., Jarosik, N., Larson, D., Limon, M., Page, L., Spergel, D. N., Halpern, M., Hill, R. S., Kogut, A., Meyer, S. S., Tucker, G. S., Weiland, J. L., Wollack, E., and Wright, E. L., *Five-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations : Cosmological interpretation*, Astrophys.J.Suppl. **180** (2009) 330–376, [[arXiv:0803.0547](#)].
- [178] Koyama, K., *Are there ghosts in the self-accelerating brane universe ?*, Phys.Rev. **D72** (2005) 123511, [[hep-th/0503191](#)].
- [179] Koyama, K., *Ghosts in the self-accelerating universe*, Class.Quant.Grav. **24** (2007) R231–R253, [[arXiv:0709.2399](#)].
- [180] Koyama, K., and Maartens, R., *Structure formation in the dgp cosmological model*, JCAP **0601** (2006) 016, [[astro-ph/0511634](#)].

- [181] Lakes, R., *Experimental limits on the photon mass and cosmic magnetic vector potential*, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 1826–1829.
- [182] Lebach, D. E., et al., *Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves Using Very-Long-Baseline Interferometry*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 1439–1442.
- [183] Li, B., Barrow, J. D., and Mota, D. F., *The cosmology of modified gauss-bonnet gravity*, Phys.Rev.D **76** (2007) 044027, [[arXiv:0705.3795](#)].
- [184] Long, J. C., Chan, H. W., Churnside, A. B., Gulbis, E. A., Varney, M. C. M., and Price, J. C., *New experimental limits on macroscopic forces below 100 microns*, Nature **421** (2003) 922–925, [[hep-ph/0210004](#)].
- [185] LoVerde, M., and Afshordi, N., *Extended limber approximation*, Phys.Rev.D **78** (2008) 123506, [[arXiv:0809.5112](#)].
- [186] Lue, A., *The phenomenology of dvali-gabadadze-porrati cosmologies*, Phys.Rept. **423** (2006) 1–48, [[astro-ph/0510068](#)].
- [187] Lue, A., Scoccimarro, R., and Starkman, G. D., *Probing newton’s constant on vast scales : Dgp gravity, cosmic acceleration and large scale structure*, Phys.Rev. **D69** (2004) 124015, [[astro-ph/0401515](#)].
- [188] Luty, M. A., Porrati, M., and Rattazzi, R., *Strong interactions and stability in the dgp model*, JHEP **0309** (2003) 029, [[hep-th/0303116](#)].
- [189] Maartens, R., and Majerotto, E., *Observational constraints on self-accelerating cosmology*, Phys.Rev.D **74** (2006) 023004, [[astro-ph/0603353](#)].
- [190] Mandelbaum, R., Hirata, C. M., Seljak, U., Guzik, J., Padmanabhan, N., Blake, C., Blanton, M. R., Lupton, R., and Brinkmann, J., *Systematic errors in weak lensing : application to sdss galaxy-galaxy weak lensing*, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. **361** (2005) 1287–1322, [[astro-ph/0501201](#)].
- [191] Mandelbaum, R., Seljak, U., Cool, R. J., Blanton, M., Hirata, C. M., and Brinkmann, J., *Density profiles of galaxy groups and clusters from sdss galaxy-galaxy weak lensing*, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. **372** (2006) 758–776, [[astro-ph/0605476](#)].
- [192] Menard, B., and Bartelmann, M., *Cosmological information from quasar-galaxy correlations induced by weak lensing*, Astron. Astrophys. **386** (2002) 784, [[astro-ph/0203163](#)].
- [193] Milgrom, M., *A Modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis*, Astrophys. J. **270** (1983) 365–370.
- [194] Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A., *Gravitation*. W. H. Freeman and company, San Francisco, 1973. San Francisco 1973, 1279p.

- [195] M.Kowalski, D.Rubin, G.Aldering, R.J.Agostinho, A.Amadon, R.Amanullah, C.Balland, Barbary, K., G.Blanc, P.J.Challis, A.Conley, N.V.Connolly, R.Covarrubias, K.S.Dawson, S.E.Deustua, R.Ellis, S.Fabbro, V.Fadeyev, X.Fan, B.Farris, G.Folatelli, B.L.Frye, G.Garavini, E.L.Gates, L.Germany, G.Goldhaber, B.Goldman, A.Goobar, D.E.Groom, J.Haissinski, D.Hardin, I.Hook, S.Kent, A.G.Kim, R.A.Knop, C.Lidman, E.V.Linder, J.Mendez, J.Meyers, G.J.Miller, M.Moniez, A.M.Mourao, H.Newberg, S.Nobili, P.E.Nugent, R.Pain, O.Perdereau, S.Perlmutter, M.M.Phillips, V.Prasad, R.Quimby, N.Regnault, J.Rich, E.P.Rubenstein, P.Ruiz-Lapuente, F.D.Santos, B.E.Schaefer, R.A.Schommer, R.C.Smith, A.M.Soderberg, A.L.Spadafora, L.-G.Strolger, Strovink, M., N.B.Suntzeff, N.Suzuki, R.C.Thomas, N.A.Walton, L.Wang, and W.M.Wood-Vasey, *Improved cosmological constraints from new, old and combined supernova datasets*, *Astrophys.J.* **686** (2008) 749–778, [[arXiv:0804.4142](#)].
- [196] Moessner, R., and Jain, B., *Angular cross-correlation of galaxies - A probe of gravitational lensing by large-scale structure*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **294** (1998) L18–L24, [[arXiv :astro-ph/9709159](#)].
- [197] Moessner, R., Jain, B., and Villumsen, J. V., *The effect of weak lensing on the angular correlation function of faint galaxies*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **294** (1998) 291, [[arXiv :astro-ph/9708271](#)].
- [198] Mukhanov, V. F., Feldman, H. A., and Brandenberger, R. H., *Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions*, *Phys. Rept.* **215** (1992) 203–333.
- [199] Nagata, R., Chiba, T., and Sugiyama, N., *Wmap constraints on scalar-tensor cosmology and the variation of the gravitational constant*, *Phys.Rev.* **D69** (2004) 083512, [[astro-ph/0311274](#)].
- [200] Narayan, R., *Gravitational lensing and quasar-galaxy correlations*, *Astrophys. J.* **339** (1989) L53–L56.
- [201] Nibbelink, S. G., Peloso, M., and Sexton, M., *Nonlinear properties of vielbein massive gravity*, *Eur.Phys.J.C* **51** (2007) 741–752, [[hep-th/0610169](#)].
- [202] Nicolis, A., and Rattazzi, R., *Classical and quantum consistency of the dgp model*, *JHEP* **0406** (2004) 059, [[hep-th/0404159](#)].
- [203] Nicolis, A., Rattazzi, R., and Trincherini, E., *The galileon as a local modification of gravity*, [arXiv:0811.2197](#).
- [204] Nojiri, S., and Odintsov, S. D., *Modified gravity and its reconstruction from the universe expansion history*, *J. Phys. Conf. Ser.* **66** (2007) 012005, [[hep-th/0611071](#)].
- [205] Nojiri, S., and Odintsov, S. D., *Modified gravity as an alternative for Lambda-CDM cosmology*, *J. Phys.* **A40** (2007) 6725–6732, [[hep-th/0610164](#)].
- [206] Nordtvedt, Kenneth, J., *PostNewtonian metric for a general class of scalar tensor gravitational theories and observational consequences*, *Astrophys. J.* **161** (1970) 1059–1067.

- [207] Nordtvedt, K., *Equivalence Principle for Massive Bodies. 2. Theory*, Phys. Rev. **169** (1968) 1017–1025.
- [208] Oyaizu, H., *Non-linear evolution of $f(r)$ cosmologies i : methodology*, Phys.Rev.D **78** (2008) 123523, [[arXiv:0807.2449](#)].
- [209] Oyaizu, H., Lima, M., and Hu, W., *Non-linear evolution of $f(r)$ cosmologies ii : power spectrum*, Phys.Rev.D **78** (2008) 123524, [[arXiv:0807.2462](#)].
- [210] Parker, L. C., Hoekstra, H., Hudson, M. J., van Waerbeke, L., and Mellier, Y., *The Masses and Shapes of Dark Matter Halos from Galaxy-Galaxy Lensing in the CFHT Legacy Survey*, Astrophys. J. **669** (2007) 21–31, [[arXiv:0707.1698](#)].
- [211] Peebles, P. J. E., and Ratra, B., *The cosmological constant and dark energy*, Rev. Mod. Phys. **75** (2003) 559–606, [[astro-ph/0207347](#)].
- [212] Percival, W. J., Reid, B. A., Eisenstein, D. J., Bahcall, N. A., Budavari, T., Fukugita, M., Gunn, J. E., Ivezić, Z., Knapp, G. R., Kron, R. G., Loveday, J., Lupton, R. H., McKay, T. A., Meiksin, A., Nichol, R. C., Pope, A. C., Schlegel, D. J., Schneider, D. P., Spergel, D. N., Stoughton, C., Strauss, M. A., Szalay, A. S., Tegmark, M., Weinberg, D. H., York, D. G., and Zehavi, I., *Baryon acoustic oscillations in the sloan digital sky survey data release 7 galaxy sample*, [arXiv:0907.1660](#).
- [213] **Supernova Cosmology Project** Collaboration, Perlmutter, S., et al., *Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae*, Astrophys. J. **517** (1999) 565–586, [[astro-ph/9812133](#)].
- [214] Perrotta, F., Baccigalupi, C., and Matarrese, S., *Extended quintessence*, Phys.Rev. **D61** (2000) 023507, [[astro-ph/9906066](#)].
- [215] Peter, P., and Uzan, J.-P., *Cosmologie primordiale*. Éditions Belin, 2005.
- [216] Pitts, J. B., and Schieve, W. C., *Universally coupled massive gravity. I*, Theor. Math. Phys. **151** (2007) 700–717, [[gr-qc/0503051](#)].
- [217] Porrati, M., *No van dam-veltman-zakharov discontinuity in ads space*, Phys.Lett. **B498** (2001) 92–96, [[hep-th/0011152](#)].
- [218] Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W., and Flannery, B., *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, 3rd ed., 2007.
- [219] Randall, L., and Sundrum, R., *An alternative to compactification*, Phys.Rev.Lett. **83** (1999) 4690–4693, [[hep-th/9906064](#)].
- [220] Randall, L., and Sundrum, R., *A large mass hierarchy from a small extra dimension*, Phys.Rev.Lett. **83** (1999) 3370–3373, [[hep-ph/9905221](#)].
- [221] Ratra, B., and Peebles, P. J. E., *Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field*, Phys. Rev. **D37** (1988) 3406.
- [222] Riazuelo, A., and Uzan, J.-P., *Cosmological observations in scalar-tensor quintessence*, Phys.Rev. **D66** (2002) 023525, [[astro-ph/0107386](#)].

- [223] Richer, H. B., Brewer, J., Fahlman, G. G., Gibson, B. K., Hansen, B. M., Ibata, R., Kalirai, J. S., Limongi, M., Rich, R. M., Saviane, I., Shara, M. M., and Stetson, P. B., *The lower main sequence and mass function of the globular cluster messier 4*, *Astrophys.J.* **574** (2002) L151–L154, [[astro-ph/0205086](#)].
- [224] Riess, A. G., Filippenko, A. V., Challis, P., Clocchiattia, A., Diercks, A., Garnavich, P. M., Gilliland, R. L., Hogan, C. J., Jha, S., Kirshner, R. P., Leibundgut, B., Phillips, M. M., Reiss, D., Schmidt, B. P., Schommer, R. A., Smith, R. C., Spyromilio, J., Stubbs, C., Suntzeff, N. B., and Tonry, J., *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, *Astron.J.* **116** (1998) 1009–1038, [[astro-ph/9805201](#)].
- [225] Riess, A. G., Strolger, L.-G., Tonry, J., Casertano, S., Ferguson, H. C., Mobasher, B., Challis, P., Filippenko, A. V., Jha, S., Li, W., Chornock, R., Kirshner, R. P., Leibundgut, B., Dickinson, M., Livio, M., Giavalisco, M., Steidel, C. C., Benitez, N., and Tsvetanov, Z., *Type ia supernova discoveries at $z > 1$ from the hubble space telescope : Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution*, *Astrophys.J.* **607** (2004) 665–687, [[astro-ph/0402512](#)].
- [226] Rubakov, V. A., and Tinyakov, P. G., *Infrared-modified gravities and massive gravitons*, *Phys.Usp.* **51** (2008) 759–792, [[arXiv:0802.4379](#)].
- [227] Ryutov, D. D., *Using Plasma Physics to Weigh the Photon*, *Plasma Phys. Control. Fusion* **49** (2007) B429.
- [228] Salam, A., and Strathdee, J. A., *A Class of Solutions for the Strong Gravity Equations*, *Phys. Rev.* **D16** (1977) 2668.
- [229] Sawicki, I., and Hu, W., *Stability of cosmological solution in $f(r)$ models of gravity*, *Phys.Rev.D* **75** (2007) 127502, [[astro-ph/0702278](#)].
- [230] Schimd, C., Uzan, J.-P., and Riazuelo, A., *Weak lensing in scalar-tensor theories of gravity*, *Phys.Rev.* **D71** (2005) 083512, [[astro-ph/0412120](#)].
- [231] Schlamminger, S., Choi, K.-Y., Wagner, T. A., Gundlach, J. H., and Adelberger, E. G., *Test of the equivalence principle using a rotating torsion balance*, *Phys.Rev.Lett.* **100** (2008) 041101, [[arXiv:0712.0607](#)].
- [232] Schmidt, F., *Weak lensing probes of modified gravity*, *Phys.Rev.D* **78** (2008) 043002, [[arXiv:0805.4812](#)].
- [233] Schmidt, F., Liguori, M., and Dodelson, S., *Galaxy-cmb cross-correlation as a probe of alternative models of gravity*, *Phys.Rev.D* **76** (2007) 083518, [[arXiv:0706.1775](#)].
- [234] Schmidt, F., Lima, M., Oyaizu, H., and Hu, W., *Non-linear evolution of $f(r)$ cosmologies iii : Halo statistics*, *Phys.Rev.D* **79** (2009) 083518, [[arXiv:0812.0545](#)].
- [235] Schmidt, F., Vikhlinin, A., and Hu, W., *Cluster constraints on $f(r)$ gravity*, [[arXiv:0908.2457](#)].

- [236] Schneider, P., *The number excess of galaxies around high redshift quasars*, Astron. & Astrophys. **221** (1989) 221–229.
- [237] Schutz, B. F., *Determining the Hubble Constant from Gravitational Wave Observations*, Nature **323** (1986) 310–311.
- [238] Schwinger, J., *Particles, sources, and fields. Volume 1*, . Reading, Mass., 1970, 425p.
- [239] Scoccimarro, R., *Redshift-space distortions, pairwise velocities and nonlinearities*, Phys.Rev. **D70** (2004) 083007, [[astro-ph/0407214](#)].
- [240] SDSS Collaboration, Scranton, R., et al., *Detection of cosmic magnification with the sloan digital sky survey*, Astrophys. J. **633** (2005) 589–602, [[astro-ph/0504510](#)].
- [241] Sen, A., *Supersymmetric world-volume action for non-bps d-branes*, JHEP **9910** (1999) 008, [[hep-th/9909062](#)].
- [242] Sen, A., *Rolling Tachyon*, JHEP **04** (2002) 048, [[hep-th/0203211](#)].
- [243] Sen, A., *Tachyon matter*, JHEP **07** (2002) 065, [[hep-th/0203265](#)].
- [244] Shapiro, S. S., Davis, J. L., Lebach, D. E., and Gregory, J. S., *Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves using Geodetic Very-Long-Baseline Interferometry Data, 1979-1999*, Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 121101.
- [245] Sheldon, E. S., Johnston, D. E., Frieman, J. A., Scranton, R., McKay, T. A., Connolly, A. J., Budavari, T., Zehavi, I., Bahcall, N., Brinkmann, J., and Fukugita, M., *The galaxy-mass correlation function measured from weak lensing in the sdss*, Astron.J. **127** (2004) 2544–2564, [[astro-ph/0312036](#)].
- [246] Sheldon, E. S., Johnston, D. E., Masjedi, M., McKay, T. A., Blanton, M. R., Scranton, R., Wechsler, R. H., Koester, B. P., Hansen, S. M., Frieman, J. A., and Annis, J., *Cross-correlation weak lensing of sdss galaxy clusters iii : Mass-to-light ratios*, [arXiv:0709.1162](#).
- [247] Sheldon, E. S., Johnston, D. E., Scranton, R., Koester, B. P., McKay, T. A., Oyaizu, H., Cunha, C., Lima, M., Lin, H., Frieman, J. A., Wechsler, R. H., Annis, J., Mandelbaum, R., Bahcall, N. A., and Fukugita, M., *Cross-correlation weak lensing of sdss galaxy clusters i : Measurements*, Astrophys.J. **703** (2009) 2217–2231, [[arXiv:0709.1153](#)].
- [248] Shirzad, A., *Perfect and imperfect gauge fixing*, J.Math.Phys. **48** (2007) 082303, [[hep-th/0609145](#)].
- [249] Silva, F. P., and Koyama, K., *Self-accelerating universe in galileon cosmology*, [arXiv:0909.4538](#).
- [250] S.L.Dubovsky, *Phases of massive gravity*, JHEP **0410** (2004) 076, [[hep-th/0409124](#)].
- [251] S.L.Dubovsky, P.G.Tinyakov, and I.I.Tkachev, *Massive graviton as a testable cold dark matter candidate*, Phys.Rev.Lett. **94** (2005) 181102, [[hep-th/0411158](#)].

- [252] Smullin, S. J., Geraci, A. A., Weld, D. M., Chiaverini, J., Holmes, S., and Kapitulin, A., *Constraints on yukawa-type deviations from newtonian gravity at 20 microns*, Phys.Rev.D **72** :122001,2005 ; Erratum-ibid.D **72** (2005) 129901, [[hep-ph/0508204](#)].
- [253] Song, Y.-S., and Doré, O., *A step towards testing general relativity using weak gravitational lensing and redshift surveys*, JCAP **0903** (2009) 025, [[arXiv:0812.0002](#)].
- [254] Song, Y.-S., Hu, W., and Sawicki, I., *The large scale structure of $f(r)$ gravity*, Phys.Rev.D **75** (2007) 044004, [[astro-ph/0610532](#)].
- [255] Sorokin, D., *Introduction to the classical theory of higher spins*, AIP Conf.Proc. **767** (2005) 172–202, [[hep-th/0405069](#)].
- [256] Sotiriou, T. P., and Faraoni, V., *$f(R)$ Theories Of Gravity*, [arXiv:0805.1726](#).
- [257] Spero, R., Hoskins, J. K., Newman, R., Pellam, J., and Schultz, J., *Test of the Gravitational Inverse-Square Law at Laboratory Distances*, Phys. Rev. Lett. **44** (1980) 1645–1648.
- [258] Starobinsky, A. A., *Disappearing cosmological constant in $f(r)$ gravity*, JETP Lett. **86** (2007) 157–163, [[arXiv:0706.2041](#)].
- [259] Teyssandier, P., and Tournenc, P., *The Cauchy problem for the $R + R^2$ theories of gravity without torsion*, J. Math. Phys. **24** (1983) 2793.
- [260] T.Padmanabhan, *From gravitons to gravity : Myths and reality*, Int.J.Mod.Phys.D **17** (2008) 367–398, [[gr-qc/0409089](#)].
- [261] Turner, E. L., Ostriker, J. P., and Gott, J. Richard, I., *The statistics of gravitational lenses : The distributions of image angular separations and lens redshifts*, Astrophys. J. **284** (1984) 1–22.
- [262] Upadhye, A., and Hu, W., *The existence of relativistic stars in $f(r)$ gravity*, [arXiv:0905.4055](#).
- [263] Uzan, J.-P., *Cosmological scaling solutions of non-minimally coupled scalar fields*, Phys.Rev. **D59** (1999) 123510, [[gr-qc/9903004](#)].
- [264] Uzan, J.-P., *The fundamental constants and their variation : Observational status and theoretical motivations*, Rev. Mod. Phys. **75** (2003) 403, [[hep-ph/0205340](#)].
- [265] Uzan, J.-P., *The acceleration of the universe and the physics behind it*, Gen.Rel.Grav. **39** (2007) 307–342, [[astro-ph/0605313](#)].
- [266] Uzan, J.-P., *Fundamental constants and tests of general relativity - Theoretical and cosmological considerations*, [arXiv:0907.3081](#).
- [267] Uzan, J.-P., *Tests of general relativity on astrophysical scales*, [arXiv:0908.2243](#).
- [268] Uzan, J.-P., and Bernardeau, F., *Lensing at cosmological scales : a test of higher dimensional gravity*, Phys.Rev. **D64** (2001) 083004, [[hep-ph/0012011](#)].

- [269] Vainshtein, A. I., *To the problem of nonvanishing gravitation mass*, Phys. Lett. **B39** (1972) 393–394.
- [270] van Dam, H., and Veltman, M. J. G., *Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields*, Nucl. Phys. **B22** (1970) 397–411.
- [271] Van Nieuwenhuizen, P., *On ghost-free tensor lagrangians and linearized gravitation*, Nucl. Phys. **B60** (1973) 478–492.
- [272] Vecchio, A., *LISA observations of rapidly spinning massive black hole binary systems*, Phys. Rev. **D70** (2004) 042001, [[astro-ph/0304051](#)].
- [273] Villumsen, J. V., *Clustering of faint galaxies : ω , induced by weak gravitational lensing*, [astro-ph/9512001](#).
- [274] Villumsen, J. V., Freudling, W., and da Costa, L. N., *Clustering of Galaxies in the Hubble Deep Field*, Astrophys. J. **481** (1997) 578, [[arXiv :astro-ph/9606084](#)].
- [275] V.Rubakov, *Lorentz-violating graviton masses : getting around ghosts, low strong coupling scale and vdvz discontinuity*, [hep-th/0407104](#).
- [276] Wagoner, R. V., *Scalar tensor theory and gravitational waves*, Phys. Rev. **D1** (1970) 3209–3216.
- [277] Wald, R. M., *General Relativity*. Chicago University Press, 1984. Chicago, Usa : Univ. Pr. (1984) 491p.
- [278] Wands, D., *Extended gravity theories and the einstein-hilbert action*, Class.Quant.Grav. **11** (1994) 269–280, [[gr-qc/9307034](#)].
- [279] Wang, S., Hui, L., May, M., and Haiman, Z., *Is modified gravity required by observations ? an empirical consistency test of dark energy models*, Phys.Rev.D **76** (2007) 063503, [[arXiv:0705.0165](#)].
- [280] website, M., [http ://documents.wolfram.com/mathematica/functions/ndsolve](http://documents.wolfram.com/mathematica/functions/ndsolve), .
- [281] Webster, R. L., Hewett, P. C., Harding, M. E., and Wegner, G. A., *Detection of statistical gravitational lensing by foreground mass distributions*, Nature **336** (1988) 358–+.
- [282] Weinberg, S., *Gravitation and cosmology*. John Wiley and Sons, 1972.
- [283] Weinberg, S., *The Quantum theory of fields. Vol. 1 : Foundations*, . Cambridge, UK : Univ. Pr. (1995) 609 p.
- [284] Wetterich, C., *Cosmology and the Fate of Dilatation Symmetry*, Nucl. Phys. **B302** (1988) 668.
- [285] Whitt, B., *Fourth Order Gravity as General Relativity Plus Matter*, Phys. Lett. **B145** (1984) 176.

- [286] Will, C. M., *Theoretical frameworks for testing relativistic gravity. ii. parametrized post-newtonian hydrodynamics and the nordtvedt effect*, *Astrophys. J.* **163** (1971) 611–628.
- [287] Will, C. M., *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge University Press Univ. Pr., 1993. 380 p.
- [288] Will, C. M., *The confrontation between general relativity and experiment*, *Living Reviews in Relativity* **9** (2006), no. 3.
- [289] Woodard, R. P., *Avoiding dark energy with $1/R$ modifications of gravity*, *Lect. Notes Phys.* **720** (2007) 403–433, [[astro-ph/0601672](#)].
- [290] Wu, F., and Chen, X., *Cosmic microwave background with brans-dicke gravity ii : constraints with the wmap and sdss data*, [arXiv:0903.0385](#).
- [291] Wu, F., e Qiang, L., Wang, X., and Chen, X., *Cosmic microwave background with brans-dicke gravity : I. covariant formulation*, [arXiv:0903.0384](#).
- [292] Zakharov, V. I., *Linearized gravitation theory and the graviton mass*, *JETP Lett.* **12** (1970) 312.
- [293] Zhang, J., Hui, L., and Stebbins, A., *Isolating geometry in weak lensing measurements*, *Astrophys.J.* **635** (2005) 806–820, [[astro-ph/0312348](#)].
- [294] Zhang, P., *Testing gravity against early time integrated sachs-wolfe effect*, *Phys.Rev.D* **73** (2006) 123504, [[astro-ph/0511218](#)].
- [295] Zhang, P., Liguori, M., Bean, R., and Dodelson, S., *A discriminating probe of gravity at cosmological scales*, *Phys.Rev.Lett.* **99** (2007) 141302, [[arXiv:0704.1932](#)].
- [296] Zhao, G.-B., Pogosian, L., Silvestri, A., and Zylberberg, J., *Searching for modified growth patterns with tomographic surveys*, *Phys.Rev.D* **79** (2009) 083513, [[arXiv:0809.3791](#)].
- [297] Ziour, R., and Hui, L., *Magnification bias corrections to galaxy-lensing cross-correlations*, *Phys.Rev.D* **78** (2008) 123517, [[arXiv:0809.3101](#)].